
FONDO PROVINCIA

ELEMENTI

DI

GEODESIA

DEL PROFESSORE DI GEOGRAFIA MATEMATICA

TOMMASO FARIAS.



NAPOLI

NELLA TIPOGRAFIA DI DOMENICO SANGIACOMO

1818.

PREFAZIONE.



La brevità del tempo non è sufficiente cagione per iscusare l' imperfezione delle opere. Vi sono non pertanto delle circostanze particolari, che han forza di moderare la giusta critica del pubblico, diretta sempre a distinguere le utili dalle opere trascurabili.

Un ordine superiore prescrivendo lo studio della Geodesia nel Real Collegio Militare, diede origine alla ricerca di un' opera elementare, che scritta nell' idioma Italiano, unisse a brevità somma il complesso delle teorie moderne. Dispiacque il non trovarsene alcuna soddisfacente al bisogno; e ne fu perciò dato l' incarico all' Autore, il quale per obbedire alle istanti premure, non potè frapporre che soli due mesi tra l' ordine ricevuto, e 'l cominciamento dell' impressione dell' opera. Che bisogna dunque pensare sul merito di una produzione quasi estemporanea? L'Autore forse meglio che altri sa valutarlo; ma egli non tanto di

ciò si duole, quanto di non aversi potuto giovare de' lumi, che potevano somministrargli tanti nomini illustri che attualmente onorano questa Capitale, e che presedono con tanto vantaggio a degli stabilimenti scientifici. Così per nominarne pochi tra' molti, avrebb' egli cercato di consultare il Governatore, e 'l Direttore degli Studj del Real Collegio Militare, i quali a profitto della gioventù Militare consagrano ogni lor cura, e tutt' i loro pensieri al perfezionamento delle scienze: siccome non avrebbe mancato di avvicinare l' illustre Direttore del Gabinetto Topografico di Napoli, e l' immortale Astronomo delle due Sicilie.

Ma tralasciando il non fatto; è ormai tempo che si esponga il complesso delle teorie prescelte, e l' ordine tenuto in trattarle. Da principio si sono presentate le regole generali, ond' eseguire una triangolazione di un paese, e ricavarne poi i dettagli. In questa prima parte, detta *Topografia*, si è fatto astrazione da quegli ostacoli che la natura del suolo, e la posizione de' segnali, suole a delle volte presentare; riserbando alla terza parte dell' opera, l' esame di simili circostanze, ed i metodi per superarle; e rendendo in tal guisa più semplice, e

più preciso l'argomento, di cui la prima parte si occupa.

Determinate le posizioni de' punti principali in riguardo al piano di projezione, mediante le rispettive distanze dalla meridiana, e dalla perpendicolare, che giustamente possono riguardarsi come due coordinate rettangolari; rimaneva a conoscersi la terza coordinata, cioè l'altezza verticale di questi punti al di sopra dello stesso piano di projezione. A tal riguardo si è fatto succedere alla prima la seconda parte, che tratta della *Livellazione*.

Finalmente nella terza, ed ultima parte si danno le regole per superare gli ostacoli che possono presentarsi nella misura delle basi, e nella valutazione degli angoli appartenenti alla triangolazione: s'insegna come bisogna operare per calcolare le distanze inaccessibili, e dividere le superficie de' poligoni in data ragione: e si dà termine al trattato con indicare, come si debba procedere per far servire le carte *topografiche* alla configurazione delle *corografiche*, e *generali*.

L'opera che l'Autore ha preso particolarmente di mira, è quella del sig. PUISSANT, ove tratta della Topografia, e della Geodesia.

La precisione di questo Scrittore, la di lui gran pratica, l'estensione delle sue conoscenze, hanno talmente fissata l'attenzione dell'Autore di questi elementi, che avrebb' egli creduto tradire i giovani, per i quali scriveva, non formandone un reassunto, capace di prepararli alla lettura di quelle opere insigni, servendo loro come di prelezione.

Si protesta con ciò l' Autore non aver mai inteso di profittarsi della gloria dovuta al sig. PUISSANT, con avere adottato i suoi pensieri in varj luoghi della Topografia; tantoppiù che si trattava di esporre teorie semplicissime, incapaci di esser variate nell'essenza, e solo suscettibili di cambiamento d' ordine, e di parole.

Se la gioventù Militare giovandosi della lettura di questi elementi, avrà il vantaggio di affrancarsi la lettura delle opere moderne, e di capire nel tempo stesso la ragione che regola le operazioni pratiche sul terreno; l'Autore è soddisfatto del suo travaglio, comunque soffrir ne possa la propria opinione nella mente del pubblico illuminato.

INDICE
DELLE MATERIE
PARTE I.

PARTE II.

PARTE III.

APPENDICE.

ELEMENTI DI GEODESIA.

INTRODUZIONE.

1. La *Geometria Pratica* è una scienza che insegna ad eseguire sul terreno, ed in grande, quelle operazioni, che la Geometria elementare insegna ad eseguire sulla carta con la riga e 'l compasso.

Grande dunque è il dominio di questa scienza; noi però ci limiteremo a' tre seguenti oggetti.

I. Al modo di rappresentare su di un foglio una limitata estensione di paese, come sarebbe una provincia di un regno, un borgo, od una città : e questa prima parte è conosciuta col nome di *Topografia*, o *arte di levare i piani.*

II. In secondo luogo ci occuperemo della *Livellazione*, ossia del modo di conoscere l'altezza de' diversi punti della terra, rapportati ad una superficie parallela a quella del mare.

III. Tratteremo finalmente dell' esecuzione pratica di alcuni problemi, che costituiscono propriamente quelle operazioni, che diconsi *Geodesiche.*

Questi tre rami della Geometria Pratica costituiscono l' insieme di quella scienza, che dicesi *Geodesia.*

PARTE PRIMA.

DELLA TOPOGRAFIA.

2. Formare la *Carta* di un paese importa il costruire su di un foglio una figura simile a quella del terreno, di cui le differenti parti si suppongono projettate sopra un piano orizontale per mezzo di perpendicolari abbassate da tutti gli oggetti sopra di questo piano.

3. Si chiama *carta topografica*, o piano, il disegno che rappresenta tutti i dettagli di una contrada, o di un dominio. Riguardo poi alle carte che abbracciano una maggiore estensione di paese, e che ci presentano solamente gli oggetti i più rimarchevoli, sono conosciute col nome di *carte geografiche*; e di esse si è già trattato nella geografia matematica.

4. Il contorno di una superficie terrestre comunque flessuoso, potendosi considerare come il contorno di un poligono rettilineo; e questo rimanendo determinato dalla conoscenza de' triangoli, ne' quali è risolubile: si comprende facilmente, che la levata di un piano sia fondata sulla determinazione di una serie di triangoli, uniti tra loro in modo, che due di essi comunque presi abbiano almeno un lato di comune.

E siccome ogni triangolo si determina mediante la conoscenza degli angoli, e de' lati; così chiunque si proponga di apprender l'arte di levare i piani, dovrà cominciare dall'imparare le tre seguenti teorie: 1. come situare un piano da potersi dire orizzontale; mentre si è detto che tutti gli oggetti componenti un terreno si deb-

bono rappresentare come projettati su di uno stesso piano orizzontale. 2. Come si possano misurare gli angoli, ed i lati di un triangolo: e 3. finalmente come poter ridurre questi angoli, e questi lati già conosciuti, sopra di un piano orizontale, nel caso che non vi fossero compresi.

Maniera di orizzontare un piano.

5. È già noto che per piano orizontale s'intenda un piano tangente della terra, come sarebbe *MN* che dinota il profilo di un piano, *F.* 1
rispetto alla curva *TKR*, che dinota un cerchio massimo della terra. Per ottenere una siffatta posizione in pratica, si dovrà sopra del piano *MN* situare una livella a bolla d'aria *AC*, secondo una direzione qualunque. Per le leggi dell'Idrostatica tutte le parti del fluido tenderanno alla minima distanza dal centro *O* della terra. Se dunque la livella abbia una posizione tangenziale nella direzione *AC*, il fluido situato negli estremi *A* e *C* si sforzerà di avvicinarsi al punto *B*, come il più vicino al centro della terra, con degli sforzi uguali, ed opposti; sicchè la bolla dell'aria premuta egualmente dall'una, e dall' altra parte dal fluido, dovrà essa occupare il predetto punto *B*, che si ritrova nel mezzo della livella, e che sopra del cristallo è marcato per mezzo di tratti. Che se poi l'estremo *C* si trovasse più discosto dal centro *O* della terra, allora il fluido concorrendo verso il punto *A*, obbligherebbe la bolla d'aria ad occupare l'estremo *C*; e lo stesso s'intenda detto dell' altro estremo *A*, se mai si trovasse più discosto dell' altro. Da ciò si ricava la seguente regola in pratica: *Quando la bolla d' aria è nel mezzo*

della livella, questa gode di una posizione orizzontale, ossia tangenziale: quando poi la bolla d' aria si avvicina ad uno degli estremi della livella, è ciò un segno che questo estremo sia più discosto dell' altro; dal centro della terra; e che perciò si debba deprimere, modificando la posizione MN *del piano, su di cui la livella si giace*. Ottenuta l' orizzontalità di un piano in un senso, si situerà la livella in un' altra direzione, che sia quasi perpendicolare alla prima, e replicandosi la stessa operazione, saremo sicuri di aver dato al piano proposto, una situazione orizzontale.

Misura degli angoli, e loro riduzione all' orizzonte.

6. Per la misura degli angoli si sono inventati varj istrumenti, tra i quali van conosciuti particolarmente il *Grafometro*, il *Cerchio ripetitore*, ed il *Teodolita di Reichembach*.

7. Il *Grafometro* o *Semicerchio da campagna*, è un semicerchio di ottone diviso in 180 gradi, ciascun de' quali è suddiviso in due, o più parti secondo la grandezza dell' istrumento. La parte circolare, sulla quale son tracciate le divisioni si chiama il *lembo*. A' grafometri ordinarj, si adattano all' estremità del diametro fisso due *pinnule*, o *traguardi*, a traverso de' quali si riguardano gli oggetti. Ciascuna pinnula debb' essere esattamente perpendicolare al lembo, ed essendo tagliata nella parte superiore, offre un' apertura nel basso, oppure reciprocamente: il mezzo poi dell' apertura è traversato nel senso della lunghezza, da un fil di seta, o da un crine. Quando si guarda un' oggetto, si deve

situar l' occhio alla fissura di una pinnula, per mezzo della quale si osserva se mai il filo corrispondente nell' altra pinnula, covra l' oggetto proposto.

Vi è poi un' altro diametro, o riga mobile, che chiamasi *alidada*, e questa è assoggettita a girare d' intorno al centro dell' istrumento, ed è guarnito ugualmente da due pinnule. Bisogna anche sapere che i grafometri più esatti son guarniti, invece de' traguardi, di cannocchiali, che si fan muovere lentamente per mezzo delle viti di richiamo, e si fermano per mezzo delle viti di pressione. Qualche volta ancora, questi cannocchiali hanno la facoltà d' inclinarsi di alcuni gradi sul piano del lembo, e questo moto forma un particolare vantaggio per la riduzione degli angoli all' orizonte, come tra poco vedremo.

8. Ritornando alla graduazione del grafometro, è da notarsi come l' estremità dell' alidada sia guarnita di un *nonio*, o *vernier*, ch' è appunto un meccanismo costruito nel modo seguente, ad oggetto di dare anche i minuti degli angoli, oltre a' gradi, e parti di gradi.

Se si volesse la parte *ennesima* della più piccola divisione del lembo, si dovrà prendere un intervallo che contenga il numero $n-1$ delle più piccole divisioni. Questo intervallo riportato sopra dell' alidada, si divida nel numero n di parti uguali, ciascuna delle quali essendo uguale ad $\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$, ci addita che la più piccola divisione del *nonio* differisca dalla più piccola del *lembo*, per una di lei parte ennesima. Così per esempio, se la più piccola divisione del lembo contenga venti minuti, e si vogliono i minuti degli angoli, la n sarà uguale a 20: si pren-

deranno dunque 19 parti del lembo, ed il loro intervallo si dividerà in 20 parti uguali sull'alidada.

F. 2 Sia AM questo intervallo del lembo, ed $A'M'$ lo stesso intervallo riportato sull' alidada. L'origine A' del nonio chiamasi *linea di fede*. Se questa combacia con l'origine A del lembo, la prima divisione B' del nonio si distacca dalla divisione B del lembo per un minuto; la seconda C' da C per due minuti; la terza D' da D per tre, e così via discorrendo. Or supponendo che nella misura di un angolo, C' combaci con C, oppure D' con D, egli sarà chiaro, che debba la *linea di fede* A' distaccarsi dalla divisione A del lembo per 2, o 3 minuti. La regola dunque del nonio è la seguente: *quella divisione del nonio segnata col numero* m, *che combacia con una delle divisioni del lembo, ci dinota che la linea di fede si allontani dalla divisione a sinistra del lembo, per un numero* m *di minuti.*

9. Tutto l' istrumento è sostenuto da un piede costruito in maniera, che sia facile d' inclinare il piano dell' istrumento in tutt' i sensi. A tale oggetto per evitare la perdita di tempo, e le moltiplici pruove, converrà disporre per quanto è possibile nella direzione degli oggetti che si osservano, le viti che procurano questa inclinazione.

10. Veniamo ora alla applicazione della macchina, nel misurare l'angolo A, sotto del quale è veduto la distanza BC. Si situi il centro dell'istrumento nel punto A, e si disponga l'alidada fissa in maniera, che riguardando a traverso de' traguardi, o del cannocchiale, il filo verticale covra il punto C. Finalmente si di-

F. 3

rigga l'alidada mobile, ovvero il cannocchiale superiore verso l' oggetto *B*, l' arco intercetto fra le due alidade sarà la misura dell' angolo *A*

11. Questo metodo suppone che i tre punti *A*, *B*, *C*, siano quasi nello stesso piano orizzontale, o che essendo il cerchio situato orizzontalmente i punti *B* e *C* siano stati veduti per mezzo della lunghezza de' tragnardi, o con l'ajuto dei cannocchiali capaci d' inclinarsi, e che i Francesi chiamano *lunettes plongeantes*. Che se i punti *B*, e *C* fossero fuori dell' orizzonte dell'osservatore, ed i cannocchiali stassero fissi sulle rispettive alidade, bisognerebbe situare il lembo nel piano medesimo dell' angolo *BAC*; e dopo aver misurato questo si dovrebbe misurare ancora l' altezza, o la depressione de' punti *B*, e *C*, nel modo che diremo quì appresso, e finalmente si dovrebbe ridurre l' angolo *BAC* in projezione sull' orizzonte, per mezzo di una formola, che quì presso daremo.

12. L' angolo sotto il quale si vede l' elevazione di un oggetto situato al di sopra dell' orizzonte dell' osservazione, si chiama angolo di altezza; e l' angolo sotto il quale si vede l' abbassamento di un oggetto, al di sotto dell' orizzonte, si dice angolo di depressione. Così supposto essere *AH* orizzontale, sarebbe *BAH* un angolo F. 4 di altezza, e *B'AH* un angolo di depressione. Per misurare questi angoli verticali, si dia al piano dell' istrumento la posizione verticale per mezzo di un filo a piombo; in seguito si situa l' alidada fissa orizzontalmente, per mezzo di una livella a bolla d' aria, che vi è adattata: finalmente si dirigge il cannocchiale dell' alidada mobile sull' oggetto *B*, o *B'*, e l' arco intercetto tra

le due alidade esibirà l' altezza BAH, o la depressione $B'AH$.

F. 5 Si chiami A l' angolo BCA, il di cui piano s' inclini su l' orizzonte $B'CA'$; e si dicano α, α' gli angoli BCB', ACA' di altezza, o depressione de' rispettivi punti B, ed A. Saranno $90^\circ \mp \alpha$, e $90^\circ \mp \alpha'$, le distanze bz, az di questi punti dal zenit z del punto C dell' osservazione : avvertendo che il segno $-$ si rapporti all' altezza, e 'l segno $+$ alla depressione. Dinotando queste distanze zenitali per mezzo de' simboli D, D', e con P la projezione dell' angolo A, si ha dalla Trigonometria sferica, che debba essere

$$\text{sen}\frac{P}{2} = \sqrt{\left\{\frac{\text{sen}\frac{A+D-D'}{2}.\text{sen}\frac{A+D'-D}{2}}{\text{sen}\,D.\text{sen}\,D'}\right\}}$$

13. Questa formola diviene inutile, qualora gli angoli α, α' siano picciolissimi, cioè minori di due, o tre gradi. Perciò i moderni hanno sviluppato in serie la differenza tra l' angolo osservato, e la sua projezione. Chi vuol conoscere queste formole, consulti la Geodesia del signor *Puissant*; mentre noi ci asteniamo di ricarle, inculcando di adoprar sempre il grafometro a *lunettes plongeantes*, o pure il teodolita, di cui tra poco daremo la descrizione.

14. *Il cerchio ripetitore* è un cerchio intero graduato, guarnito di due cannocchiali, che si rendono mobili, o fissi a volontà; e de' quali uno chiamasi *superiore*, perchè situato dalla parte del lembo graduato, e l' altro *inferiore* perchè situato dalla parte opposta. Il cannocchiale superiore è annesso ad un' *alidada*

circolare che porta quattro nonj, disposti tra loro ad angolo retto. Per attenuare gli errori che potrebbero esistere nella divisione del lembo, si legge la graduazione con i quattro nonj, prima e dopo dell' osservazione. Così per esempio se prima di cominciare l' osservazione, gl' indici de' quattro nonj corrispondeano alle divisioni del lembo, indicate dalla serie (*a*)

	1	2	3	4
(*a*)	0°.0′.0″	90°.0′.2″	179°.59′.57″	270°.0′.1″

E dopo eseguita la prima osservazione, corrispondano alle divisioni indicate dalla serie (*b*)

(*b*)	30°.7′.15″	120°.7′.16″	210°.7′.14″	300°.7′.16″

Sottraendo i termini della serie (*a*) da' corrispondenti della serie (*b*), si avranno i seguenti archi percorsi da' rispettivi nonj, cioè

30°.7′.15″ 30°.7′.14″ 30°.7′.17″ 30°.7′.15″

Dalla somma di questi presone il quarto, potrà dirsi con probabilità che il vero arco percorso dal cannocchiale sia di

30°. 7′. 15″, 25.

Ci asteniamo dall' entrare in ulteriori dettagli su le parti, che compongono questa macchina, ben complicata di sua natura, stimando più utile il descriverla a' giovani a viva voce, ed in presenza della stessa macchina.

Ci basta il dire che questo cerchio sia destinato a diminuire per quanto si voglia, gli errori della divisione, e quelli che possono provenire dall' osservazione, ripetendo sufficientemente la misura degli angoli, come qui presso diremo.

Debbasi dunque misurare l' angolo *B A C* con il cerchio ripetitore, di cui le divisioni procedano da destra verso sinistra. Dopo aver situato il lembo nel piano degli oggetti *B*, e *C*, si porti il cannocchiale superiore al zero della graduazione, e vi si fissa per mezzo della vite di pressione; in seguito si dirigge sull' oggetto *C* a destra, rendendo per mezzo delle viti, il piano del lembo incapace di prender nuova posizione. Ciò fatto si rende mobile il cannocchiale inferiore, affin di diriggerlo sull' oggetto *B* a sinistra, e ciò fatto si fissa al lembo, e si sarà ottenuta la prima parte dell' osservazione. In seguito, allentando le viti si rende libero il moto della macchina, e si farà girare tutto l' istrumento affine di dirigere il cannocchiale inferiore sull' oggetto *C* a destra. Quando avrà luogo questa circostanza si fermano le viti, e si conduce il cannocchiale superiore sull' oggetto *B*, che rimane a sinistra. L' arco che quest' ultimo cannocchiale ha percorso, e che si dee valutare dal punto zero di partenza, sarà il doppio dell' angolo che si è voluto osservare. Con questo metodo se ne potrebbe avere il quadruplo, il sestuplo, ec. ripetendo la stessa operazione per 2, 3, o più volte, e valutando ciascun arco non più dal zero, ma dal punto di divisione in cui si ritrova il cannocchiale superiore alla fine di ciascun *osservazione conjugata*.

15. Volendo poi osservare collo stesso istrumento la distanza zenitale di un dato oggetto, converrà mettere il piano del cerchio in posizione verticale, per mezzo di un filo a piombo, e di maniera che le divisioni del lembo rimangano alla destra dell' osservatore. Indi fissato il cannocchiale superiore a zero, si dovrà diriggerlo sul-

l'oggetto, facendo girare circolarmente il lembo, ma sempre nel piano verticale in cui si trova l'oggetto. In seguito si dovrà situare orizzontalmente il cannocchiale inferiore per mezzo di una livella a bolla d'aria, e servendosi a tale oggetto della vite di richiamo del medesimo cannocchiale. Ciò fatto si farà fare al piano del lembo un mezzo giro, talchè dalla destra esso passerà a situarsi a sinistra dell'osservatore, rimanendo però sempre nel verticale dell'oggetto; e se mai in questa mezza rivoluzione del lembo, il cannocchiale inferiore abbia perduta la sua orizzontalità, si dovrà ridonarcela, per mezzo di un moto insensibile del lembo, e non più per mezzo della vite del cannocchiale come si era praticato da prima. Finalmente ricondotto sopra l'oggetto il cannocchiale superiore, l'arco che esso avrà percorso sarà il doppio della distanza al zenit che si cercava. Nello stesso modo si potrebbe ottenere il quadruplo, il sestuplo, ec. di questa distanza, ripetendo due, tre, o più volte la stessa operazione.

16. *Il Teodolita ripetitore* di Reichembach, non differisce dal cerchio ripetitore, se non che questo è capace di aver tutte le possibili posizioni, mentre che il primo è sempre disposto orizzontalmente. Il grande utile che il teodolita arreca alla Geodesia, ci obbliga a descrivere minutamente la maniera di adoperarlo, supponendo però che il lettore abbia presente la macchina.

Dopo aver situato l'istrumento sopra un fermo sostegno, si deve cominciare dal *rettificarlo* nel seguente modo. Si sospende la livella all'asse del cannocchiale superiore, e dopo aver fermato il lembo, e l'alidada, si mette la livella in equilibrio per mezzo delle viti del piede del teodo-

lita. Se girando la livella, la bolla occupi lo stesso spazio di prima, la livella è esattamente rettificata; avvenendo il contrario si correggerà la metà della differenza colle viti del piede, e l'altra metà con la vite della livella. Lo stesso saggio dovrà replicarsi finchè la bolla non mostri alcuna differenza, nel giro della livella.

Si farà fare in seguito all'alidada una rivoluzione di 180° : se la bolla del livello non soffre cambiamento di sito, si è sicuro che i sostegni del cannocchiale superiore sieno elevati di un' eguale altezza, e che l' asse dell' istrumento sia verticale, almeno in questo senso. Se poi il livello marca un cambiamento, bisogna correggere la metà della differenza per mezzo delle due viti opposte, l' una all' altra, che si ritrovano ne' sostegni del cannocchiale superiore, e l'altra metà con le viti del piede dell'istrumento : e ciò dovrà replicarsi finchè girando l' alidada, il livello non soffra cambiamento. Finalmente corretta l' inclinazione del lembo con le viti del piede, in modo che la bolla del livello resti immobile in tutti i sensi in cui si ritrovi l' alidada, si è sicuro allora, che l'asse di rivoluzione del teodolita sia esattamente a piombo, e che l' asse trasversale del cannocchiale superiore, sia in una posizione orizzontale.

Affinchè gli archi che descrive il cannocchiale superiore sieno precisamente archi di uno stesso verticale, che passa per lo zenit dell' osservatore, converrà mettere l'asse ottico del cannocchiale in posizione verticale sopra il di lui asse centrale. A tale effetto dopo aver fermato il lembo, e l' alidada, convien guardare un oggetto terrestre qualunque; in seguito senza toccar l' istrumento, si cava dolcemente il cannocchiale dai cavicchi,

che lo sostengono, e dopo di averlo girato, si torna a situarlo in maniera, che ciascun estremo dell' asse entri nella cavità opposta. Se il filo verticale del micrometro mostra esattamente lo stesso punto di mira, l' asse ottico è perpendicolare all' asse di rivoluzione del teodolita; altrimenti bisogna rimuovere il micrometro, e l'alidada in maniera che girando il cannocchiale, il filo ci presenti il medesimo oggetto.

17. Rettificato l'istrumento, e volendo usarlo per misurare l'altezza di un oggetto terrestre qualunque, si guarderà per mezzo del filo orizzontale del micrometro l' oggetto medesimo, e poi si osserverà con tutta l' esattezza possibile il punto del cerchio verticale, a cui corrisponde il vernier. In seguito si passa a sollevare il cannocchiale dalla posizione in cui si ritrova, e si dovrà girarlo sopra il suo asse in maniera, che il cerchio verticale rimanendo nello stesso sito, la lente oggettiva del cannocchiale sia rivolta verso l' osservatore. In seguito fatta percorrere all' alidada un' arco di 180°, si dovrà diriggere il cannocchiale sopra lo stesso oggetto veduto precedentemente, e si osserverà una seconda volta il vernier. L' arco dell' cerchio verticale, compreso fra queste due osservazioni è il doppio della distanza al zenit dell' oggetto osservato. Se la metà di quest' arco si toglie da 90° si avrà l' altezza dell' oggetto sopra dell' orizzonte: che se l' oggetto fosse depresso sotto dell' orizzonte, per averne la depressione, converrà togliere 90° dalla metà dell' arco predetto. In seguito rimesso il cannocchiale nella posizione primitiva, si ripete l' osservazione del medesimo oggetto, per assicurarsi che l' istrumento non abbia sofferto alcun cambiamento durante una tale operazione. Final

mente per conoscere il punto di divisione, a partire del quale si cominciano a contare gli angoli verticali, bisogna al numero de' gradi marcati dal *vernier*, aggiungere, o togliere l' altezza, o la depressione di un' oggetto osservato. È utile parimente il riconoscere qual punto del cerchio verticale debba marcare il vernier, alloraquando l' asse ottico del cannocchiale si ritrova in posizione orizzontale. Una tale conoscenza può aversi o da una livella mobile, applicata sul tubo del cannocchiale superiore, e poi messa in equilibrio; oppure dal conoscere la graduazione che segna il *vernier*, alloraquando il cannocchiale è diretto sopra di un oggetto terrestre, combinata con la conoscenza dell' altezza, o della depressione dello stesso oggetto, che precedentemente si è insegnato a conoscere.

Oltre agli angoli di altezza, il teodolita è utilissimo nell' esibirci la projezione orizzontale di un angolo esistente nello spazio tra due oggetti terrestri: questa macchina oltre all' esibizione di questa projezione, ce ne attenua gli errori con moltiplicare lo stesso angolo per mezzo di semplici ripetizioni. Ecco la maniera di operare: si mette l' indice dei quattro vernier sopra i punti del lembo segnati con zero, 90°, 180°, 270°, e si gira il lembo insieme con l' alidada, finchè il cannocchiale superiore sia diretto sull' oggetto a destra dell' angolo, che si vuol misurare. Fissato allora il cerchio, si dovrà con moto lento menare l' intersezione de' fili del *micrometro* sopra un punto preciso dell' oggetto predetto; e nello stesso tempo si dovrà diriggere il cannocchiale inferiore sopra un'oggetto qualunque, ma che sia ben distinto, fissandolo in tale posizione per mezzo di una vite corrispondente. Ciò fatto,

allentando la coesione che teneva l'alidada unita al lembo, si farà girare la sola alidada, finchè il cannocchiale superiore sia diretto sull' altro oggetto situato a sinistra dell' angolo. L' arco segnato dal *vernier* sarà la projezione dell' angolo cercato. Per assicurarsi in tanto che la macchina non siasi spostata dalla sua primitiva posizione, per il movimento procurato alla sola alidada, bisognerà mirare nel cannocchiale inferiore, che dal principio dell' osservazione è rimasto sempre fermato sul lembo, e vedere se esso precisa lo stesso oggetto; e se qualche alterazione vi avesse luogo, bisognerebbe correggere questa differenza per mezzo della vite di correzione del cannocchiale inferiore, e ricondurre in seguito il cannocchiale superiore con moto dolce, sopra il punto di mira.

In tal modo si ottiene un angolo semplice, che si potrà poi moltiplicare per quanto piaccia, purchè in ciascuna osservazione, si ripeta la correzione del cannocchiale inferiore.

Misurare la distanza tra due punti accessibili di un terreno.

18. Dopo la misura degli angoli, conviene indicare come si misuri la distanza accessibile tra due punti *A*, e *B* di un terreno: quale distanza, che chiamasi *base*, o *linea Geodesica* serve ordinariamente di lato ad uno di' que' triangoli, che si considerano tracciati su quel terreno, di cui si cerca levar la pianta. Ma siccome le diverse nazioni non hanno la stessa unità di misura, così è pregio dell'opera indicare le misure nostre, e quelle delle principali nazioni, con esibirne il rapporto numerico, affin- F.6

chè ne' casi particolari si sappiano le une ridurre alle altre con ispeditezza. In Napoli si adopra per unità di misura il *palmo*, diviso in 12 once, ed ogni oncia in 5 minuti. Il miglio Italiano, di cui 60 formano un grado medio della terra contiene 7025 palmi, ossia 878 canne, ed un palmo. Presso i Francesi un tempo si adoprava per unità di misura il *piede Parigino*, diviso in 12 *pollici*: ogni pollice in 12 *linee*, ed ogni linea in 10 *punti*. Sicchè il piede contiene 1440 punti, o decimi di linea, qual numero sarà da noi preso per *modulo*, o per espressione numerica da rapportarvi le altre unità di misure, espresse ancora numericamente.

Sei piedi formano la *tesa*, o *pertica di Parigi*.

Tese 2280 $\frac{1}{2}$ formano una *lega* comune di Francia di 25 al grado; talchè un grado medio della terra contenendone 57012, ne risulta che il miglio Italiano contenga 950 tese, e $\frac{1}{5}$ di tesa.

19. La misura moderna de' Francesi è il metro, equivalente a 3 piedi, 11 linee, e $\frac{296}{1000}$ di linea, ossia a piedi 3,078444. E siccome la stessa misura è attualmente adottata nel Gabinetto Topografico del nostro Regno; così faremo uso indistintamente del palmo, e del metro, nel corso di questa istituzione; passando dall' una all' altra misura, per mezzo dell' equazione

$$P = M(3{,}79)$$

in cui P dinota i palmi corrispondenti al numero M di metri. Le altre misure di Francia, sono i moltiplici, e summoltiplici del metro in ordine decimale. Così una lunghezza di 10 me-

tri, si dice *decametro*, e *ettometro* quella di 100 metri. Viceversa il decimo, il centesimo, il millesimo di un metro, si dicono rispettivamente *decimetro* o *palmo*, *centimetro* o *dito* *millimetro* o *tratto*, e quì si arrestano.

Finalmente questo metro è la 10 milionesima, parte del quadrante terrestre; talchè il miglio italiano di 60 al grado, dovrà contenere 1851, 852 metri.

Se il metro si voglia esprimere in parti del modulo 1440, dovrà farsi la seguente proporzione

$$1 : 3{,}078444 = 1440 : X;$$

$X = 4432{,}96$ è il valore richiesto; e se invece di 3,078444, si ponga un multiplice, o summultiplice, se ne otterrà la rispettiva riduzione.

20. La seguente tavola ci esibisce i rapporti numerici tra le nostre misure, e quelle delle principali nazioni.

Palmi, e piedi espressi in punti del piede Parigino.

Palmo di Napoli	1169
Di Palermo	1073
Di Roma	990
Di Torino	2270
Di Milano	2166
Piede Parigino	1440
Inglese	$1351\frac{2}{5}$
Di Spagna	1240
Di Olanda	1258
Di Ginevra	5070
Metro	$4432\frac{96}{100}$

Miglio in tese.

D' Italia	950⅜
D' Inghilterra	817
Di Russia (Wersta)	560
Di Spagna	3260
Di Germania , e Olanda	3812

21. Premesse queste nozioni , e volendosi misurare una base, la prima cura debb' essere di scegliere un terreno eguale , ed il meno ondoso. In seguito gli agrimensori si dovranno provvedere de' seguenti oggetti : 1. di alcuni bastoni di legno , che i francesi dicono *piquets*, *ou jalons* , della lunghezza arbitraria di quattro , o più palmi , e che terminando con punta di ferro da una parte , onde poterli conficcare a terra , hanno l' altra estremità spaccata da ricevervi un piccolo quadrato di carta bianca , per servire da segnale. 2. Di una catena di ferro , della lunghezze di 10 canne , o anche meno, e composta di maglie , o bacchette di un palmo l' una , ed unite tra loro con degli anelli. Questa catena è terminata ne' suoi estremi da due maniglie, e deve aver de' segni di tratto in tratto della sua lunghezza, per dinotare l'estensione di una canna. I Francesi solevano farla una volta della lunghezza di 10 tese, ora le danno 10, o 5 metri di lunghezza, ed è conosciuta fra loro col nome di *catena metrica*. 3. Di alcune caviglie di ferro, che i Francesi dicono *fiches* , terminate in punta, affin di poterle conficcare a terra , nel sito, in cui termina la catena , quando è bene attesata. La loro lunghezza suol'essere di due palmi circa, ed in un bisogno si potrebbero anche farle di legno. 4. Finalmente dovranno

provvedersi di un' asta, o pertica ben dritta, della lunghezza di una canna, suddivisa in palmi, ed once. Questa riga che i Francesi chiamano *doppio metro*, servirà o per misurare le piccole distanze, o quegl' intervalli, che sogliono rimanere alle volte tra un estremo della catena ed un dato punto del terreno. Quando però si voglia usare di questa riga per misurare con esattezza una data distanza, è utile di averne un' altra che le sia uguale, ad oggetto di adattare l' una appresso all' altra sul terreno, e non rimuovere la prima se non dopo aver ben situata la seconda. Per evitar poi le alterazioni che possa cagionar su tale ordegno la temperatura dell' aria, è utile il servirsi del legno di zappino, immerso nell' olio bollente, e poi coverto di denso colore, o di una vernice ben densa: ed affinchè non si curvi, bisogna che sia costruita in forma di parallelepipedo a base quadrata.

22. Quando si avranno questi ordegni, si procederà nel seguente modo alla misura della distanza AB. Si comincia dal situare due bastoni AR, BL negli estremi A, e B in posizione verticale, la quale si ottiene facilmente con traguardare il bastone AR a traverso di un filo a piombo, che si farà pendere liberamente nella posizione m, e correggendone la direzione se non sia coincidente: lo stesso saggio replicato nell' altra posizione n, quasi perpendicolare alla prima, con badare però che il bastone non esca dal primo piano verticale, si verrà ad ottenere l' intento. Lo stesso dovrà farsi con l' altro bastone, o picchetto BL. In seguito si situerà quasi ad egual distanza da' punti A, e B, un altro picchetto CQ, in modo che il suo estremo Q sia nel raggio visuale che passa pe' ver-

*

tici R, ed L de' primi. Nel mezzo delle distanze parziali AC, CB si faccia una simile operazione, ne' punti D, ed E; e così sempre continuando, si dovran piantar tanti picchetti che l'uno disti dall'altro per circa 100 passi. Questa operazione che i Francesi dicono *jalonner*, e che noi potressimo dire *allineare una distanza*, richiede la più grande esattezza. Ciò fatto si ferma un estremo della catena nel punto A, per mezzo di un bastone, mentre un *porta-catena* avendo con se dieci caviglie, caminerà in avanti per distendere la catena nella direzione di AB, procurando di darle una posizione orizzontale, qualunque siano le inflessioni del terreno. Quando la catena si è tesa il più ch'è possibile, dovrà il porta-catena dinotarne l'estremità, per mezzo di una delle dieci caviglie, che dovrà conficcar nel terreno. Lo stesso si pratica successivamente con distendere per dieci volte la catena, venendosi così ad impiegare le dieci caviglie succennate, ed avendo cura l'agrimensore che siegue il porta-catena, di toglierle poi da terra, e consegnarcele di nuovo. La lunghezza di dieci canne costituisce una *portata* della distanza, la quale essendone maggiore, si continuerà la misura, e si noterà alla fine dell'operazione su di un registro, il numero delle portate, delle canne, e de' palmi in essa contenute.

La precisione di una pianta dipendendo dall'esatta misura di una base, dovrà replicarsene la misura per tre, o quattro volte, cominciando da B verso A, se prima fu misurata da A verso B: fatta poi la somma di queste distanze, se ne prenderà la terza, o quarta parte, e si dovrà questa riguardare probabilmente come la vera distanza.

23. Sin' ora si è supposto che la distanza *AB* sia orizzontale, ma se il terreno offrisse una sensibile inclinazione, come sarebbe il pendio *AB* rispetto al piano orizzontale *MN*; allora si misura la distanza obbliqua *AB*, e poi si riduce all'orizzontale *MB*, per mezzo della formola F. 7

$$L = L' \cos. \varphi$$

Ove φ dinota l'inclinazione *ABM*, *L'* la distanza misurata *AB*, ed *L* l' orizzontale *MB*, che si deve adottare nel disegno.

24. Per misurare l'angolo φ invece del grafometro, o del cerchio ripetitore, è più comodo adoprare una delle seguenti *livelle di pendio*.

Sopra una base *ac* poggia il triangolo isoscele *abc*, guarnito di un arco *mn*, che ha per centro il vertice *b*, e per raggio l'altezza *br* del triangolo. Dallo stesso vertice *b* è sospeso un filo a piombo, il quale dovrà passare per il punto *r*, quando la base *ac* abbia una posizione orizzontale. Ma situandosi questa machina sul piano obliquo *AB*, il filo passerà per un punto *s* dell'arco *mn*, venendo a dinotare per mezzo dell'arco *rs* l' inclinazione *ABM*. A tale oggetto l'arco *mn* è graduato in modo, che cominciando la graduazione da *r*, si prolunga per circa 50°, ne' due sensi *m*, ed *n*. Questa macchina è conosciuta ancora col titolo di *livella a perpendicolo*.

L'altra livella che può vedersi nel gabinetto delle macchine del Real Collegio Militare, consiste in una riga *AB* di ottone, lunga circa due palmi. In uno degli estremi sorge un quadrante *EB* graduato, che ha per centro il punto *C*, posto ad $\frac{1}{2}$ della lunghezza *AB*. D'intorno a questo centro gira un raggio mobile, o alidada *CT*, che terminando in un nonio, sostiene una livella a bolla d'aria. Quando la riga *AB* è in sito F. 8

orizzontale, l'indice del nonio corrisponde all'origine B della graduazione, e la livella è in equilibrio: quando poi è situata obliquamente, la livella esce di equilibrio, e per ricondurvela, bisognerà girare l'alidada CT d'intorno all'arco EB, finchè si verifichi l'equilibrio della livella. Supposto che ciò avvenga nel punto T', sarà TB, l'inclinazione del piano su di cui poggia la riga AB.

Triangolazione, o fissazione trigonometrica de' punti principali di una contrada.

25. Nella levata di un piano, che abbia una considerevole estensione, si debbono distinguere due diverse operazioni, cioè la *triangolazione*, e le *operazioni di dettaglio*.

I principali punti di una contrada potendosi riguardare come i vertici di una serie di triangoli, la determinazione trigonometrica di questi, da cui deriva la posizione rispettiva di que' punti, chiamasi triangolazione. Questa poi si divide in *primaria*, e *secondaria*, secondocchè i triangoli siano di una vasta, o di una mezzana estensione: nel primo caso, dopo eseguita la triangolazione primaria, si dovrà istituirne una seconda, che sia contenuta nell'aja di ciascun triangolo primario. I precetti però di queste due triangolazioni sono gli stessi, mentre sì nella prima che nella seconda, è necessario che in ciascuno de' triangoli si conosca un lato, e si misurino i tre angoli; ne' primi perchè potendosi considerare come sferici, la somma de' tre angoli è sempre maggiore di due retti; ne' secondi, perchè potendosi commettere un errore nella misura di due angoli, tutto il fallo caderebbe sul terzo.

La sola differenza può avvenire su la correzione degli angoli : mentre ne' *triangoli primarj* essendo la somma de' tre angoli ordinariamente maggiore di due retti, si dovrà togliere il terzo di tal' eccesso da ciascuno de' tre angoli; e dopo tal correzione si dovrà risolvere il triangolo come se fosse rettilineo, giusta i precetti del sig. *Legendre* (1). Viceversa ne' *triangoli secondarj* non essendovi una sensibile sfericità, avviene qualche volta che la somma de' tre angoli o ecceda, o manchi dal valore di due retti, per errori commessi nelle osservazioni. Quando la differenza non sia troppo sensibile, si suol ripartire proporzionatamente sul valore di ciascuno de' tre angoli; e poi si passa alla risoluzione del triangolo.

Fissata la posizione trigonometrica de' punti principali di una contrada, le operazioni che rimangono a farsi, per riempere l' aja di ciascun triangolo di quegli oggetti che vi si contengono, come sarebbero borghi, riviere, laghi, e cose simili; queste operazioni, ripeto, son conosciute col nome di *operazioni di dettaglio*.

26. Si è detto al principio di questo capitolo, che per determinare le posizioni rispettive de'

---

(1) Il sig. *Legendre* ha dimostrato con un elegante teorema, che se un triangolo sferico di piccolissima sfericità abbia la somma de' tre angoli maggiore di due retti per una quantità ϵ, equivalente a pochi minuti; e che oltre a' tre angoli si conosca anche un lato di questo triangolo sferico : si possano calcolare gli altri due lati co' precetti della trigonometria rettilinea, purchè da ciascun angolo si tolga $\frac{1}{3}\epsilon$: avendosi in tal modo, un risultato identico a quello, che avrebbe dato la trigonometria sferica.

punti principali di un piano, bisognava considerarli come vertici di triangoli, che con il loro incatenamento, formassero una rete continuata in tutt' i sensi. Questi triangoli riuniscono le condizioni le più vantaggiose alloraquando sono i più grandi possibili; quando si avvicinano alla forma equilaterale; e siano finalmente legati ad una linea principale, conosciuta col nome di *Base*. Alloraquando questa base, ed i tre angoli di ciascun triangolo si siano misurati con i precetti esposti dinanzi, e se ne sia fatto notamento in un registro, si hanno tutti gli elementi necessarii per calcolare di mano in mano le distanze fra gli oggetti; cioè a dir propriamente, si è già formato l'*abbozzo del piano*, o secondochè dicono i Francesi *le canevas du plan*.

F. 9 Siavi p. es. la rete triangolare *ABCDE*..... nella quale noi supponiamo cognito un lato, per esempio, il lato *GH* considerato come base, ed i tre angoli di ciascun triangolo. Risolvendo il triangolo *FGH*, di cui sono noti gli angoli, ed un lato, si verrà ad ottenere la lunghezza *FG* che dovrà prendersi per base del secondo triangolo *EGF*. Risoluto anche questo, si passerà al calcolo de' lati del quarto triangolo *FCE*, e così di seguito.

Per precisare un po' meglio le idee su queste operazioni accennate, diremo qualche cosa sulla condizione più vantaggiosa de' triangoli, e sulla natura di que' punti, che ne debbono costituire i vertici. Si è detto che i triangoli debbonsi avvicinare alla forma equilaterale, poichè in tal caso gli angoli si osservano con più facilità, ed i piccoli errori commessi nella loro misura influiscono meno sulla lunghezza de' lati. Ma questa condizione non si può sempre otte-

nere nella pratica, per cui è necessario avvertire che facendosi uso del teodolita ripetitore, si possano francamente adottare gli angoli non minori di 23, o 24 gradi, essendosi conosciuto per esperienza che un' errore di 3'', o 4'' commesso nella misura degli angoli, non giunga a produrre un metro di errore sopra qualunque de' lati, tuttocchè il lato massimo sia di 60000 metri. Oltre a ciò vi esiste una legge di compenso, la quale fa sì, che gli errori lungi dall'accumularsi a poco a poco sopra i lati de' triangoli, ed influire per intero su l' ultima linea della rete triangolare, si compensino in modo tra loro, quando però i triangoli siano assai numerosi, che suol trovarsi una piccola differenza tra i valori di questa ultima linea, desunti prima dal calcolo, e poi dalla misura effettiva: cosa che deve sempre praticarsi per la verifica delle operazioni geodesiche.

I punti poi di una contrada da potersi adottare per i vertici di una triangolazione, sono ordinariamente i campanili, le torri, i mulini, ed in generale tutti gli oggetti isolati, e di una facile osservazione. Questi però non sempre s' incontrano, e qualche volta son sì mal disposti fra loro, che non saprebbero esibire una vantaggiosa triangolazione: conviene allora supplirvi, o per mezzo degli alberi situati sull'eminenze, o con de' segnali artifiziali. La pratica fa vedere che degli alberi ben dritti, a cui siansi tolti i rami inferiori, e che finiscono in una cima acuminata, al pari de' cipressi, siano de' buoni segnali, particolarmente allorchè non abbiano alle spalle altri oggetti che gli confondano, ma che restino projettati sul cielo: le piramidi quadrangolari di pietre si possono ancora usar con van-

taggio, dipingendole se conviene, per poterle meglio distinguere dal fondo di un terreno, o da altro oggetto che le nascondesse alla vista. Il sig. Puissant ha rilevato per esperienza, che dando ad un segnale l'altezza di $\frac{3}{20000}$ del più gran lato di un triangolo, e facendo la base uguale ad un terzo dell' altezza, sia esso visibile, tuttocchè il lato massimo sia di 60000 metri.

27. Resta per ultimo ad avvertire, che il cerchio destinato alla misura degli angoli, debba sempre situarsi nel *centro della stazione*, cioè nel mezzo di quel segnale, cui si sono dirette le visuali, allorchè l' osservatore si trovava nelle altre stazioni. Qualche volta però la natura degli oggetti osservati si oppone a questo precetto, e per valutare il piccolo errore dell' angolo, i moderni han ritrovato una formola, che daremo nella 3.ª Parte di questo trattato, per non complicare l' argomento principale, di cui ci stiamo occupando; tantoppiù che si tratta di una circostanza particolare da potersi il più delle volte evitare.

*F.*10 28. Invece di formare la triangolazione di un paese secondo i precetti del §. 26, egli è più semplice, allorchè non si badi ad una rigorosa esattezza, di procedere nella maniera seguente: sieno *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, *G*, *H*, *K*, *L* i punti fondamentali di un piano, punti che sono rappresentati da' segnali convenevolmente stabiliti nel fare la riconoscenza del paese, oppure dalle torri, e campanili sulle quali si possa facilmente osservare. Si sceglieranno tra questi oggetti due punti i più elevati, per es. *A*, *B*, la cui distanza *AB* non solamente sia facile a misurarsi, ma che sia disposta in ma-

niera da potersi osservare da' suoi estremi il più gran numero de' punti *A*, *B*, *C*, ec. : avendo cura per altro, che tal distanza *AB* non sia troppo piccola, rispetto a quella de' punti visibili. Verificate queste circostanze, si passa alla effettiva misura della distanza *AB*, da doversi adottare per base del disegno ; e poi si misurerà nel punto *A*, col grafometro, o meglio ancora con il teodolita ripetitore gli angoli *CAB*, *DAB*, *HAB*, *FAB*, *BAG*. Se si operi col grafometro convien diriggere il cannocchiale fisso sul punto *B*, e portare successivamente il cannocchiale mobile sui punti *C*, *D*, *H*, *F*, *G*. Fatte queste osservazioni nella prima stazione *A*, si anderà a farne delle simili nella seconda stazione *B*, cioè a dire si rileveranno gli angoli *CBA*, *DBA*, *HBA*, *FBA*, *GBA*. In tal modo si verrà a conoscere in ciascuno de' triangoli *ACB*, *ADB*, ec.. un lato, e gli angoli adjacenti ; potendosi in tal modo calcolare le distanze *AC*, *CB*, *AD*, *DB*, ec., per mezzo delle quali, e della base *AB*, si possono determinare in seguito sopra la *messa in netto*, e con l' ajuto degl' istrumenti da tavolino, le rispettive posizioni de' punti *A*, *C*, *D*, *H*, *B*, *G*, *F*. Volendo poi situar sulla carta i punti *K*, ed *L* non visibili dal punto *A*, ma che possono osservarsi da' punti *B*, ed *H*, si dovrà considerare la distanza *BH* già nota per mezzo de' calcoli precedenti, come una nuova base, che servirà per legare questi nuovi punti al primo sistema, osservando gli angoli *KHB*, *LHB*, *KBH*, *LBH* : poichè in tal modo si vengono a conoscere ne' triangoli *KHB*, *LHB* due angoli, ed un lato.

Lo stesso dovrà eseguirsi con la distanza tra punti *C* e *D*, *D* ed *F*, *F* ed *L*, ec. che si

possono calcolare per mezzo de' triangoli *CBD*, *DBF*, *FBL*, di cui sono noti i due lati, e l'angolo compreso, come differenza di due angoli osservati; dovendosi ciascuna di esse adottare come la base di un nuovo sistema di triangoli, destinati alla determinazione di altri punti principali.

Eseguita *la messa in netto*, per mezzo di un semicerchio da tavolino, di una scala di riduzione, e del registro contenente i valori de' lati, e degli angoli di ciascun triangolo; rimane a farsi l'ultima operazione, cioè ad *orientare* il piano del disegno, con tracciarvi sopra una *linea meridiana*, che faccia con una delle rette segnate, lo stesso angolo, che il meridiano terrestre forma con la corrispondente linea del terreno. In tal modo resta determinata la posizione degli oggetti in riguardo a' quattro punti cardinali. Uno de' mezzi più facili per ottenere quest' angolo, è di recarsi in uno de' punti principali del terre-
.11 no, per es. nel punto *A*, e quivi in una bella notte rivolgere il cannocchiale superiore del cerchio ripetitore, che siasi già disposto verticalmente, sopra la stella polare. Nel tempo stesso un secondo osservatore baderà al momento preciso in cui la stella polare, e la stella ε dell'orsa maggiore sieno in un medesimo verticale, cioè che amendue le stelle si possano mirare a traverso di un filo a piombo, che penda dall' estremo di un' asta. Quando ciò avviene, il primo osservatore fisserà la direzione del suo cannocchiale, che trovasi diretto alla polare, ed allorchè farà giorno, si farà mettere un segnale *P* un po' lontano dal luogo dell' osservazione ed in modo che si ritrovi nell' asse ottico del cannocchiale abbassato verso dell' orizzonte. In seguito per mez-

zo del teodolita si osserva l' angolo *PAM* tra il segnale *P*, e l' oggetto *M* del terreno, che trovasi già rappresentato sulla carta. Questo angolo *PAM*, che chiamasi *l' azimuto* del punto *M*, è bastante a far conoscere la direzione di tutti i lati de' triangoli in rapporto alla meridiana terrestre.

Per ajuto de' principianti, è necessario avvertire, che la stella ε dell' orsa maggiore sia la prima di quelle tre, che ne formano la coda, ed è la più prossima al quadrilatero.

Posizione de' punti principali per mezzo delle loro distanze dalla meridiana, e dalla sua perpendicolare.

29. Si è accennato, che una triangolazione potea mettersi in netto, cioè riportarsi sopra un foglio di disegno per mezzo di una scala, di un semicerchio da tavolino, e del corrispondente registro.

Ma riflettendo all' imperfezione delle macchine da tavolino, e considerando che col costruire l' un dopo l' altro i diversi triangoli, si faccia dipendere la posizione di un punto da quella di altri punti che lo precedono; talchè gli errori commessi nella determinazione grafrica de' primi, influiscono per necessità su quella de' punti susseguenti, non si tarderà a vedere l' imperfezione di questo metodo. Per ripararvi dunque, e rendere le posizioni de' punti indipendenti tra loro, si è convenuto di rapportarli a due assi rettangolari, cioè alla meridiana *AX* del punto *A*, F. 11
che rappresenta un luogo principale, ed alla sua perpendicolare *AY*, e poi calcolare le rispettive coordinate rettangolari di ciascun punto *M*, *m*,

M', M'', ec., cosa che può facilmente eseguirsi mediante la conoscenza de' triangoli, e dell' *azimut* osservato.

In fatti sia AX la meridiana del luogo A, ed AY la sua perpendicolare, e supponendo che i triangoli AMM', AmM', ec. facciano parte di una rete trigonometrica, si domandano le coordinate de' punti m, M, M', ec., cioè le distanze Ap, pm; AP, PM; AP', $P'M'$, ec. — Se l' angolo mAp è l' azimut osservato, egli è chiaro che tutti i triangoli siano orientati, e che si possano conoscere facilmente gli altri azimuti, MAP, $M'AP'$, poichè gli angoli MAM', $M'Am$, sono già noti. In tal modo menando per i vertici di tutti i triangoli della catena, delle parallele alla meridiana, ed alla perpendicolare, come si vede all' ispezione della figura, i lati di questi triangoli diverranno le ipotenuse di altrettanti triangoli rettangoli, che si potranno facilmente risolvere. Per es., la risoluzione de' triangoli rettangoli APM, $AP'M'$ darà le coordinate de' punti M, M'; la risoluzione del triangolo $M'M''b$ farà conoscere similmente le distanze bM'', bM'; e siccome le coordinate del punto M'', sono AP'', $P''M''$, si avrà

$$AP''=AP'+bM'$$
$$P''M''=P'M'+bM''.$$

Similmente dopo il calcolo delle distanze dM', dM''', si avrà

$$AP'''=AP'+dM'$$
$$P'''M'''=P'M'-dM'''.$$

così di seguito.

31. Calcolate queste distanze dalla meridiana, e dalla sua perpendicolare, per facilitare la costruzione grafica de' punti, si suol far uso di un *reticolato*, costruito con quella scala di riduzione, che si è voluto adottare. Nel Gabinetto Topografico di Napoli questa riduzione è di $\frac{1}{20000}$, cioè che le parti della scala sono la 20000.ma. parte di quelle che rappresentano; talchè a ventimila metri del terreno, corrisponde un *metro* della scala, a 2000 metri un *decimetro*, a 200 un *centimetro*, a 20 metri un *millimetro*. Supposto dunque che si adotti questa scala per la costruzione del reticolato, si dovranno condurre le due rette *AB*, *CD*, perpendicolare l'una sull' altra, per dinotare la perpendicolare, e la meridiana di quel paese, ch'è dinotato dal punto *E*. *F.* 12

A partire da questo punto verso *A*, e *B*, non meno che verso *C*, e *D* si taglino delle parti uguali, ciascuna di cinque centimetri, per dinotare la lunghezza di mille metri; proporzionando il numero di queste parti all' estenzione che deve avere la pianta nel senso di *N–S*, e di *E–O*. Per gli estremi di queste parti uguali condotte delle parallele ad *AB*, e *CD*, si verrà a formare il reticolato a forma di rettangolo. Se si vuol situare un punto che abbia 3450 metri di distanza dalla meridiana *AB*, e 2500 dalla perpendicolare *CD*, dovrà conoscersi ancora la direzione di queste coordinate, cioè sapere se il paese sia a levante, o a ponente della meridiana *AB*, e sia a mezzogiorno, o a tramontana della perpendicolare. Nel registro dunque dove si segnano le dette coordinate, bisognerà indicarvi le loro direzioni per mezzo de' simboli *N*, *S*, *E*, *O*, o far uso di altro segno convenzionale ad oggetto

di evitare gli equivoci. Con questi mezzi si agevola grandemente la fissazione grafica de' punti, potendosi determinare al momento il quadrato nel quale debba situarsi un punto qualunque; e riducendosi il resto dell' operazione nel prendere intorno a' lati opposti di questo quadrato delle distanze minori di 1000 metri, e congiunti i punti di divisione, si sarà fissato il punto nell' incontro delle congiungenti.

32. Quì giova il fare un' importante riflessione, qual' è appunto: *che dal calcolar le distanze de' punti principali dalla meridiana, e dalla sua perpendicolare, rimanga implicitamente calcolata la lunghezza di un arco di meridiano frapposto tra due luoghi della terra*. Così nel caso nostro, rimane conosciuto, l'arco di meridiano AX, che intercetta tra il punto A, e 'l punto X, e di cui la lunghezza è uguale alla somma delle rette note $AP+PP'+P'P''+$ec.

Operazioni di dettaglio.

33. Per riempiere le aje de' triangoli di quegli oggetti che vi si contengono sul terreno, bisogna venire a delle operazioni che diconsi di dettaglio, e che si eseguono per mezzo di tre istrumenti, cioè la *plancetta*, la *bussola*, e la *squadra di agrimensore*.

Uso della plancetta.

34. Questo istrumento, che forse è il più utile per figurare la natura di un terreno, è composto di una tavoletta quadrata, sostenuta da un piede a cui sono annessi tre bastoni. La costruzione del di lei sostegno debb' esser tale,

che si possa imprimere alla tavoletta un movimento dolce di rotazione, senza che perda la posizione orizzontale, che deve sempre conservare durante il corso delle operazioni. Si cerca poi di dare alla plancetta questa posizione orizzontale, o per mezzo di una livella a bolla d'aria (5), o per mezzo di una livella a perpendicolo, che ci troviamo aver descritta nel §. 24: ma in mancanza di queste macchine, una persona esercitata vi potrà supplire facilmente a colpo d'occhio.

Per servirsi della plancetta, bisogna che si abbia ancora una riga di ottone, detta *alidada*, o *diottra*, la quale abbia ne' suoi estremi due traguardi, simili a quelli del grafometro (7); ovvero un cannocchialetto, che posto nel mezzo dell'alidada, abbia solamente la facoltà d'inclinarsi all'orizzonte. Uno de' tagli di questa riga, dicesi *linea di collimazione*, ed essa determina su la carta annessa alla plancetta, la direzione de' raggi visuali, che partendosi dal punto ove trovasi l'osservatore, vanno a terminare agli oggetti circostanti.

35. Due metodi vi sono per levare i dettagli, qualunque siasi l'istrumento che si adotti. Il primo metodo consiste nel tracciare d'intorno allo spazio da figurarsi, un poligono del minor numero possibile di lati; e dopo misurati con esattezza gli angoli, ed i lati, abbassare delle piccole perpendicolari da tutte le sinuosità del terreno sopra di questi lati, come si vede all'ispezione della figura 13; e finalmente nel disegnare tutti gli oggetti racchiusi in detto poligono. Si avverte ancora che il poligono debba essere circoscritto, se trattasi di un bosco denso ed impossibile a penetrarvisi; e che viceversa debba essere iscrit-

to, se trattasi di disegnare un' isola, o un campo circondato da boschi e da paludi.

Il secondo metodo che ordinariamente si adopra quando non si può misurare, che una sola linea da prendersi per base, consiste nel rilevare tutti gli angoli, che formano con questa base misurata, i raggi visuali, diretti da' suoi estremi a tutt' i punti visibili, situati a destra, ed a sinistra di essa. Ma nel servirsi di questo metodo, bisogna di evitare gli angoli troppo acuti, e troppo ottusi, mentre la posizione di un punto data dall' intersezione di due rette, è tanto più esatta quanto queste rette si tagliano meno obliquamente.

Applicazione del primo metodo.

PROBL. I.

36. *Levare con l' ajuto della plancetta lo spazio accessibile ABCD, ed in seguito orientarlo rispetto alla base AH, ch' è un lato de' triangoli già calcolati, e che su la plancetta vien dinotato dalla retta* ah.

F.13 SOLUZ. Si situi orizzontalmente la plancetta sul punto *A*, di maniera che il punto *a* sia nella sua verticale; cosa che facilmente si ottiene per mezzo di un gran compasso a punte ricurve, delle quali una va situata al disopra della plancetta nel punto *a*, e l' altra corredata di un filo a piombo, dee corrispondere al di sotto della stessa planeetta in maniera, che il piombino cada nel punto *A* del terreno. Ottenuta questa disposizione, si ponga l' alidada sulla plancetta, facendo coincidere la linea di collimazione (34)

con la retta *ah* tracciata sulla carta, e si faccia girare dolcemente la plancetta, finchè l'asse del cannocchiale o de' traguardi sia nelle direzione della base *AH*; allora la plancetta dicesi *orientata*, nè deve uscire di questa posizione, finchè durino le osservazioni nella medesima stazione. Si conficca in seguito nel punto *a* un ago guarnito di una testa di cera di Spagna, e per rilevare l'angolo *HAB*, si farà girare lentamente l'alidada d'intorno a questo ago, finchè si vegga a traverso del cannocchiale il picchetto situato in *B*, o tutt'altro oggetto dell'allineamento *AB*. Finalmente si tracci col lapis una linea indefinita lungo il taglio della riga, che si appoggia sull'ago, e si avrà sulla carta, la retta *ab* formante con *ah* l'angolo *bah*=*BAH*: supposto ben vero, che dopo questa seconda operazione, prosegua la retta *ah* a coincidere con *AH*, ciò ch'è importante di verificare.

Prima di lasciare la stazione *A*, si farà misurare la distanza *AB* e preso sulla scala del piano il numero de' metri trovati, si porterà la lunghezza ottenuta in questo modo da *a* in *b*. Si faranno inoltre misurare le parti *Ax*, *xy*, ec., della retta *AB*, non meno che le piccole perpendicolari *x x'*, *y y'*, ec. abbassate dai punti della curva *Ay' B* sopra della retta *AB*, e si rapporteranno sul piano di disegno, come vi fu rapportata l'intera retta *AB*. Se si è bene operato, bisogna che tutte le distanze parziali *Ax*, *xy*, *yz*, ec. siano eguali ad *AB*.

Allorchè la curva *Ay' B* è molto irregolare, bisogna accrescere il numero delle perpendicolari *x x'*, *y y'*, *z z'*, ec., ed è anche comodo in questo caso, di renderle equidistanti. Per abbassar poi queste perpendicolari si è solito servirsi del-

la *bussola* guarnita di due traguardi, o della *squadra di agrimensore*, che tra poco sarà da noi descritta; ma quando queste perpendicolari fossero molto corte, è facile allora il giudicare della loro direzione ad occhio nudo. Viceversa supponendo i punti x', y' ec. molto lontani dalla retta AB, si potrà determinarne la posizione, servendosi della retta AB per base, e facendo uso della planeetta secondo i precetti del secondo metodo, che anderemo ad esporre.

Nell' abbandonare la stazione A, vi si pianterà un picchetto, e si anderà a situare la plancetta orizzontalmente nel punto B; avendo cura, dopo aver tolto il picchetto B, di far convenire il punto b della plancetta con il punto B del terreno. Si passerà in seguito ad orientar l'istrumento, o che vale lo stesso, a rendere la sua nuova posizione parallela alla prima; ed a tale effetto si metterà il taglio dell' alidada su la retta ab, e si farà girar la plancetta finchè l' asse ottico del cannocchiale, o de' traguardi, passi per il picchetto A. In questo stato la plancetta è *orientata*, e per rilevare l' angolo ABC, si farà girare l' alidada d' intorno all' ago situato in b, e quando il raggio visuale passerà per il picchetto C, si avrà su del piano la direzione bc, corrispondente a BC; e per conseguenza abc sarà eguale ad ABC.

57. Egli è della più grande importanza il verificare queste operazioni in ciascuna stazione; e perciò senza smuovere la plancetta, dovrà mettersi il taglio dell' alidada sulla retta che passa per i punti b, ed h del disegno, e non essendosi errato sulla misura di AB, oppure nella orientazione dell' istrumento, bisognerà che l' asse ottico del cannocchiale, o de' traguardi passi

per il punto H del terreno. Nel caso che il punto H fosse invisibile dalla stazione B, bisognerebbe diriggere de' raggi visuali su di altri punti del terreno, che fossero già rappresentati sul disegno. Della stessa maniera si dovranno continuare le operazioni, per levare il resto del contorno del poligono ABC . . . . . ; e si avrà l'ultima pruova dell' esattezza di tutta la operazione, se dopo avere orientata la plancetta in E, il raggio visuale eb coincida esattamente con la direzione EB.

38. Noi abbiamo prescritto di misurare tutt' i lati del poligono, essendo ciò di rigore quando si voglia figurar bene il contorno $Ax'y'$. . . . B; ma alloraquando le rette AB, BC . . . fossero precisamente i limiti del terreno, e che si potesse senza inconveniente sagrificar qualche parte della precisione geometrica, la misura di una sola base basterebbe per la configurazione del poligono.

In fatti, se dopo aver determinata la lunghezza della retta ab, ed il valore dell' angolo $abc = ABC$, si passi a stabilirsi nel punto C, con far ivi corrispondere la retta bc del disegno con la retta BC del terreno, affine di *orientar* la plancetta; ed avendo piantato un ago in a, si faccia muovere d' intorno ad esso un' alidada, finchè il raggio visuale sia diretto al picchetto A; la linea di collimazione intersegherà la retta indefinita bc in un punto c, che sarà su la carta la posizione della stazione C.

Per determinar poi il punto d, si disponga il punto c nella verticale del punto C del terreno, e si osservi se la plancetta sia bene orientata: in seguito diriggendo l'alidada sul picchetto D, si segni su la carta la direzione dell' alli-

neamento *cd*. Ciò fatto converrà recarsi nel punto *D* del terreno, e dopo avervi orientato l'istrumento, si faccia, come si è praticato di sopra, girare l'alidada d'intorno al punto *a*. Quando il raggio visuale passerà per il punto *A*, il taglio della riga taglierà la retta indefinita *cd* in un punto *d*, che sarà quello che si cercava: e così di seguito.

La dimosrazione geometrica di questa operazione, si ritrova nel considerare, che il perimetro di un poligono resti pienamente determinato, quando si conoscano un lato, gli angoli, e le direzioni delle diagonali, che uniscono il vertice di un angolo con i vertici di tutti gli altri.

39. Operando nel modo anzidetto, si comprende che il poligono *abcd* . . . si ritrovi già rapportato a due punti trigonometrici *a*, ed *h*, e che sia perciò situato nella sua naturale posizione. Ma trattandosi di un poligono situato nel mezzo di uno de' triangoli primitivi, senza avervi alcun vertice, o lato di comune; bisognerà allora misurar la distanza che uno de' suoi vertici serba da un punto trigonometrico del disegno, e rilevare gli angoli che questa distanza forma con uno de' lati del poligono, e con uno de' lati del triangolo che lo comprende.

40. Se si avesse per oggetto il figurare isolatamente una piccola estensione di terreno; il primo punto *a* del disegno dovrà prendersi ad arbitrio su la plancetta, e per *orientare* il piano del disegno in riguardo alla meridiana terrestre, si farà uso del *declinatore*, nel modo seguente.

Il *declinatore* è formato da una cassettina
F.14 *AB* rettangolare, che nel mezzo della sua base tien segnata una retta *NS* parallela al lato più

lungo. Questa retta è destinata a rappresentare la meridiana del luogo dell'operazione; che perciò dal suo mezzo sorge un perno acuminato, che sostiene un ago calamitato. Questo dirigendosi costantemente al polo, dovrà conservare una posizione costante, mentre può inclinarsi sotto diversi angoli con la retta *NS*, la qualecambia di direzione ogni qual volta si muove la cassettina *AB*. Per regolare il valore di questi angoli d'inclinazione, vi sono segnati due archi nel fondo stesso della cassettina, i quali cominciando ad esser graduati da' punti *N*, ed *S*, si distendono d'ambo le parti in distanza di 30, o più gradi. Quando sia cognita la *variazione* dell'ago calamitato per il luogo, nel quale si opera, bisogna situare il declinatore sul piano della plancetta, e disporlo in maniera che l'ago faccia con la retta *NS* un angolo eguale alla detta variazione, nel senso corrispondente. Allora segnando sul disegno, per mezzo del lapis, il taglio del lato più lungo della cassettina, si verrà a segnarvi la meridiana, e quindi il disegno sarà *orientato*.

Applicazione del secondo metodo.

41. Si adopra il secondo metodo, quando si tratta di levare il contorno di un poligono dotato di due condizioni, cioè che sia terminato da linee quasicchè rette, e che sia situato in un terreno molto eguale, talchè dagli estremi di uno de' suoi lati siano visibili i vertici de' rimanenti angoli, che gli appartengono. Qualche volta ancora questo metodo divien necessario nella pratica, supposto che non sia possibile il recarsi ne' diversi punti del perimetro di un poligono, il quale ci presentasse un solo lato accessibile,

è capace di esser misurato. Nel trattare però di questo metodo, ci asterremo da' dettagli, mentre questo non differisce da quello adottato nella triangolazione (28), se non per la qualità dell' istrumento destinato alla misura degli angoli: in quello si adopra il teodolita ripetitore, come una macchina capace di stabilire con precisione i punti fondamentali di una carta; in questo si fa uso della plancetta, trattandosi di piccole operazioni, ove non si richiede un' egual' esattezza: ma in tutto il resto i due metodi sono i medesimi, e sì l'uno che l'altro è destinato a fissare i punti di un piano per mezzo delle intersezioni delle visuali. Andiamo dunque ad applicarlo con il seguente problema.

Probl. II.

42. *Levare con la plancetta il contorno del poligono ABCDE . . . , situato in un terreno eguale, e del quale si conosca il solo lato AE.*

F 15 Soluz. Si situi la plancetta al di sopra del punto *A*, e presovi al di sopra un punto *a* che sia in corrispondenza col primo; si dirigga l'alidada al picchetto situato in *E*; tirando sul disegno la retta indefinita *ae*, alla quale converrà dar poi tante parti della scala per quanti sono i metri o le canne contenute in *AE*.

In seguito facendo girare l'alidada d'intorno all' ago situato in *a* si anderà diriggendola successivamente sopra i differenti oggetti *B*, *C*, *F*... affin di ottenere i raggi *ab*, *ac*, *af* . . . al di sopra della plancetta. Di poi si dovrà andare nel punto *E*, per ripetervi le medesime opera-

zioni, cioè a dire si dovranno determinare i raggi *eb*, *ec*, *ef* . . . i quali colle loro intersezioni con i primi, verranno a determinare i punti *b*, *c*, *f* . . . In tal modo la figura *abcf* sarà simile alla forma che ha il terreno *ABCF*, o per dirlo più esattamente, sarà *abcf* la projezione ortogonale di *ABCF*.

In riguardo al punto *D*, il quale si trova quasi nella direzione di *AE*, si dovrà anche determinarlo per intersezione, ma col prendere però la retta *ec* per base.

43. Al di più de' due metodi esposti di sopra, vi è un'altra maniera di levare con la plancetta il contorno di un poligono, la quale potendosi adoprare, presenta de' risultati esattissimi. Le circostanze che si richieggono per adoprarlo, si riducono a due, cioè che il poligono sia accessibile al di dentro, e che racchiuda uno spazio sì ben disposto, da istituirvi delle misure tra una stazione interna, ed i vertici de' suoi angoli. Come poi bisognerebbe operare per delinearne il perimetro, apparisce dal seguente problema.

Probl. III.

44. *Levare con la plancetta il contorno del poligono ABCDE accessibile al di dentro, senza che si conoscano gli angoli del perimetro.*

Soluz. Si situi la plancetta in un punto quasi centrale della superficie *ABCDE*, e dopo aver bene orizzontato il piano della macchina, vi si prenda al disopra un punto *o* ad arbitrio, il quale si projetti sul terreno, per mezzo di un F.16

compasso a punte ricurve, e di un filo a piombo. Conficcato un ago nel punto *o*, vi si adatti il taglio dell' alidada, diriggendola successivamente a' punti *A*, *B*, *C*, ec. che sono i vertici del poligono, e che precedentemente si sono contrassegnati con de' segnali, o picchetti.

Marcando con un lapis le diverse direzioni dell' alidada, si avranno sul disegno i diversi angoli *aob*, *boc*, *cod*, ec. rispettivamente uguali agli angoli *AOB*, *BOC*, *COD*, ec. esistenti nel piano del poligono.

Misurate le distanze accessibili *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*, e queste riportate per mezzo di una scala, su le direzioni *oa*, *ob*, *oc*, *od*, *oe*; si verrà ad avere la figura *abcde* simile a quella del terreno.

45. Uno de' problemi importanti, che si presenta frequentemente nella levata de' piani, consiste a determinare sopra un piano di disegno, la posizione di un qualunque punto del terreno, purchè da questo punto si veggano tre oggetti, di cui la posizione sia di già conosciuta. Ecco come si risolve questo problema con l'ajuto della plancetta.

PROBL. IV.

46. *Supposto che i tre punti A, B, C siano dati sul piano che covre la plancetta, si domanda di fissarvi la posizione del punto D dal quale sono visibili.*

SOLUZ. Si adatterà su la plancetta una carta inverniciata e molto trasparente; e d'intorno al punto *d* preso a volontà, ma che deve rappre-
F.17 sentare il punto *D*, si farà girare l'alidada per diriggerla successivamente a' tre punti *A*, *B*, *C*,

Le rette indefinite *da*, *db*, *dc* segnate sulla carta inverniciata, conterranno tra di loro i medesimi angoli che vi contengono le rette *DA*, *DB*, *DC*. Ciò fatto, si distaccherà questa carta, e si dovrà disporla sul piano del disegno in maniera, che le tre rette *da*, *db*, *dc*, passino rispettivamente per i punti *a*, *b*, *c*, segnati sopra di questo piano. Quando questa circostanza avrà luogo, il punto *d* sarà situato in riguardo agli altri *a*, *b*, *c*, come lo è il punto *D* del terreno rispetto ad *A*, *B*, *C*. Si ricalchi dunque il punto *d* sul piano del disegno, e si avrà ottenuto l'intento. Se non si avesse una carta trasparente, vi si supplirà, con descrivere sopra le corde *ab*, *bc* due archi di cerchio, capaci di contenere rispettivamente i due angoli *bda*, e *cdb*; il punto d'incontro di questi archi, fisserà la posizione *d*. Si comprende che questo problema sia indeterminato, nel caso, che i quattro punti del terreno *A*, *B*, *C*, *D* siano allocati in una stessa circostanza di cerchio, locchè si conoscerà se mai i due angoli *ABC*, ed *ADC* presi insieme formino due angoli retti.

47. L'importanza di questo problema, c'induce a darne ancora la seguente soluzione trigonometrica. S'intenda condotta una circonferenza di cerchio per i due punti dati *A*, e *C*, e per il punto ignoto *D*. Questa circonferenza taglierà la diagonale *BD* al di sopra, o al di sotto del punto *B*, secondocchè il supplemento di *ADC* sia minore, o maggiore dell'angolo dato *ABC*; siccome il problema sarebbe indeterminato, se mai fosse $180^\circ - ADC = ABC$. Essendo identica la risoluzione per i due primi casi, supporremo che l'intersezione abbia luogo al di sotto nel punto *m*. Il triangolo *AmC* è il

terminato per esser nota AC, e gli angoli mAC, mCA, rispettivamente uguali agli angoli osservati mDC, mDA. Si calcoli dunque Am, talchè nell' altro triangolo BAm essendo noti i lati AB, Am, e l' angolo compreso $BAm = BAC - BDC$, si potrà calcolare l'angolo ABm, il quale appartenendo pure all' altro triangolo ABD, di cui si conoscono il lato AB, e l'angolo BDA, verrà a determinarlo pienamente; sicchè sarà facile il calcolare i valori delle rette AD, e BD, che determinano il punto D di posizione.

Uso della bussola.

48. La bussola è uno stromento, che malgrado la sua imperfezione, presenta ad un' ingegniere de' singolari vantaggi, nel levare con prontezza gli oggetti destinati a riempiere ed ornare i piccoli spazj, che si sono già figurati con la plancetta; e finalmente nel fare della riconoscenze militari. Essa è composta al pari del declinatore, di un ago calamitato sostenuto in equilibrio da un perno estremamente acuminato, e rinchiuso in una cassettina quadrata, nel di cui fondo vi è riposto un cerchio di metallo diviso in 360 gradi, e dal di cui centro si eleva il perno predetto. Nella circonferenza di questo cerchio vi sono marcati i quattro punti cardinali, e la linea nord-sud, segnata ne' suoi estremi con o, e 180°, è parallela ad uno de' lali della cassettina quadrata. A questo medesimo lato vi è adattata un' alidada a traguardi, o a cannocchiale, la quale potendo prendere tutte le possibili inclinazioni rispetto all' orizzonte, non esce mai dal piano della cassettina al quale è annessa; talchè i raggi visuali si conservano sempre paralleli

alla linea di nord-sud. La cassettina è mobile al di sopra di un piede sostenuto da tre bastoni, al pari della plancetta.

Allorchè si vogliono fare delle osservazioni con la bussola, bisogna darle una posizione orizzontale, e girarla costantemente verso il medesimo lato, ad oggetto di non equivocare nella valutazione degli angoli; cioè a dire si dovrà sempre diriggere l'alidada a destra, o a sinistra, contando gli angoli dal *o* sino a 360°. Per meglio intendere l' uso che debba farsi di questa macchina, indicaremo come si possano con essa risolvere alcuni problemi.

P r o b l. V.

49. *Levare con la bussola il piano del poligono ABCDEF, di cui tutti i punti sono accessibili*

Soluz. Si situi orizzontalmente la bussola nel punto *A*, e si faccia girarla sopra del suo sostegno, finchè il punto *B* sia nella direzione de' traguardi, o dell' asse ottico del cannocchiale. L'ago dopo le varie sue oscillazioni, prenderà la direzione del nord: allora contando il numero de' grandi dal o, o dalla linea nord-sud sino alla punta boreale dell'ago, si avrà la misura dell'angolo formato dalla direzione *AB*, e dal meridiano magnetico, col servirsi o de' gradi compresi tra il cardine nord, e la punta boreale dell' ago, o del complemento a 360°, secondocchè la punta dell' ago si ritrovi a destra, o a sinistra della linea nord-sud. *F.*18

Allorquando le misure prese sul terreno, e gli angoli misurati colla bussola non si vogliano

successivamente rapportare sopra un foglio di disegno per mezzo della scala, e del semicerchio da tavolino; converrà almeno formarsi uno schizzo somigliante al piano che si vuol levare, e sopra a' lati di questo converrà notarsi le misure prese, ed i valori degli angoli ottenuti con la bussola. Eccone un esempio: supponiamo che *abcd*... sia lo schizzo di cui si tratta; si dovrà scrivere nel punto *a* il numero de' gradi ritrovati nella stazione *A*, che supposto essere di 330°, ci dimostra essere l'angolo *nab* di 30°; e poi si scriverà sopra la retta *ab* il numero de' metri 428, che sono contenuti in *AB*.

In seguito si situerà la bussola orizzontalmente nel punto *B*, e si osserverà l'inclinazione della visuale *BC* con la direzione dell'ago calamitato, scrivendone il valore nel punto *b* dello schizzo. Lo stesso si continuerà finchè si ritorni alla prima stazione *A*.

Uno de' mezzi di assicurarsi che non siasi commesso un notabile errore sulla misura degli angoli, è di vedere se gli angoli interni del poligono, presi insieme formino tanti angoli retti quanto ne dinota il doppio numero de' lati del poligono, meno quattro: considerando in questa operazione che siano tra di loro parallele le direzioni che prende l' ago calamitato ne' diversi punti del piano.

In riguardo alla verifica de' lati, si potrà farla con costruire il poligono per mezzo del semicerchio da tavolino, e della scala adottata; e con osservare se la figura resti ben chiusa. Per effettuire questa operazione nella maniera più semplice, e più esatta, converrà tirare sulla carta un gran numero di rette parallele, le quali rappresentando le direzioni dell' ago calamitato, ser-

viranno a regolare la posizione del semicerchio ne' diversi punti del piano.

Poichè si è detto che le direzioni del meridiano magnetico possono considerarsi parallele tra' limiti di un piccolo spazio ; ne segue che non sia necessario il fare delle stazioni in ciascun angolo del poligono $ABCD$ . . . Per esempio, si evita la seconda stazione B, alloraquando nella terza stazione si conosca l' inclinazione di BC sopra il meridiano $s''n''$, o sia l' angolo $n''CB$; essendo il di lui supplemento $BCs''=n'BC$. Lo stesso verificandosi per altri punti del piano, sarà facile il decidere alla semplice ispezione dello schizzo, quali stazioni si possano evitare, ad oggetto di rendere più sollecita l' operazione da eseguirsi.

60. Il metodo di sopra esposto, s' impiega con successo per levare il corso de' fiumi, le sinuosità delle strade, il contorno delle piccole tenute, o delle case isolate ; ed in una parola, tutti i minuti dettagli, per i quali adoprando la planeetta, s' incontrebbe della difficoltà, e perdita di tempo. Conviene però avvertire, che a misura che si operi con la bussola, bisogni rapportarne il risultato sopra del disegno appartenente alla plancetta, ad oggetto di farvi le necessarie verifiche, ed osservare se il tutto corrisponda alla forma del terreno che giace ancora sott' occhio, o di cui si abbia ancora fresca la memoria. E finalmente è necessario di fissare ogni sera il disegno con l' inchiostro della china, ad oggetto di non confondere quella parte che si è già designata e verificata.

PROBL. VI.

51. *Condurre da un punto B una parallela alla retta A C, e dallo stesso punto condurvi una perpendicolare.*

SOLUZ. Si osservi in *A* l' inclinazione della retta *A C* con il meridiano magnetico *A n*; ed
F.19 in seguito situata la bussola nel punto *B*, si giri finchè la linea *nord-sud* faccia con l' ago magnetico un angolo eguale ad *n A C*. Traguardando allora a traverso dell' alidada, si faccia situare un picchetto nella direzione della visuale *BK*, e sarà questa parallela ad *A C*.

Volendo poi condurre sopra di *A C* una perpendicolare dal punto *B*, bisognerà fare la medesima operazione, con la sola avvertenza di non traguardare per la direzione dell' angolo dato, ma per quella della sua perpendicolare; lo che si riduce a togliere 90° dalla graduazione, a cui corrisponde la punta boreale dell' ago calamitato; e poi disporre la linea *nord-sud* in maniera, che la stessa punta dell' ago corrisponda alla nuova graduazione corretta. Se la graduazione primitiva fosse minore di 90°, converrà prima aggiungervi un' intera circonferenza, e poi dedurne un quadrante; o che val lo stesso, converrà correggerla con aggiungervi 270°.

Per darne un esempio, supponiamo che nel misurare l' angolo *n A C*, il zero della graduazione sia diretto verso il punto *C*; e che la punta boreale dell' ago rivolta al punto *n*, corrisponda al numero 230° della graduazione, che supponiamo continuata sino a 360°. Dall' arco di 230° toltone un quadrante, rimarranno 140° per la nuova graduazione, che dovrà segnare la punta boreale dell' ago, affinchè la linea *nord-sud* sia

diretta perpendicolarmente sopra di AC. Disposta dunque in tal modo la bussola nel punto B, e traguardando da B verso M, si farà situare un picchetto nel punto M, e sarà BM perpendicolare ad AC.

P r o b l. VII.

52. *Due punti* A, *e* B *del terreno essendo dati sul disegno in* a, *e* b, *e data ancora la direzione dell' ago calamitato rispetto alla retta* a b, *determinare su questo disegno la stazione* M.

Soluz. Si misurino in M le inclinazioni de' raggi visuali MA, MB in rapporto all'ago calamitato ; di poi sul disegno si traccino ne' punti a, e b, coll' ajuto di un semicerchio, le linee meridiane ns, $n's'$. In seguito per fissare l' inclinazione di am in riguardo ad sn, si prenda il supplemento dell' angolo AMn'', e questo valore si dia all'angolo nam. Lo stesso si faccia nel punto b, e l' intersezione di queste due rette sarà il punto richiesto. F.28

Se sopra il disegno fossero dati altri punti, con essi bisognerebbe replicare la stessa operazione, ad oggetto di verificare la prima : i nuovi raggi visuali passerebbero ancora per il punto m, qualora non si fosse errato o nella prima, o nelle operazioni seguenti.

Uso della squadra di agrimensore.

53. Questo stromento poco adatto per levare un piano molto disuguale, ed ondoso, puol essere utile intanto nelle grandi pianure, ed anche per alcune operazioni geodesiche. Che però

non faremo che solamente accennarlo, senza molto trattenerci sopra il di lui uso.

Questa macchina è composta da un cerchio di rame, di circa cinque pollici di diametro, diviso in quattro parti uguali da due diametri che si tagliano ad angolo retto, ed alla estremità de' quali si elevano perpendicolari al lembo quattro traguardi, fermati per mezzo di viti. Qualche volta la *squadra* è formata da un cilindro di ottone, di circa 3 pollici di diametro, vuoto al didentro, ed avente nella superficie quattro fissure nel senso dell' altezza, e disposte tra loro nella direzione di due diametri perpendicolari l' uno all' altro. Queste fissure tengono luogo de' traguardi che appartengono alla prima forma dell' istrumento. Nell' uno, e nell' altro modo la macchina è sostenuta da un piede a tre rami, e prima di adoperarsi è necessario di farne la verifica a questo modo. Si traguardi un oggetto lontano a traverso di due traguardi opposti, prendendo per oculare la fissura di uno, e per oggettiva il filo dell' altra; poi si guardi un altro oggetto egualmente lontano, per mezzo degli altri due traguardi. In seguito si fa girare l' istrumento perpendicolarmente sopra il suo piede, finchè il primo oggetto sia veduto a traverso de' secondi traguardi; indi si osservi se il secondo oggetto sia precisamente nella direzione de' due primi traguardi. Se questa coincidenza ha luogo, l' istrumento è esatto, altrimenti converrà correggerlo, o cambiarlo. È anche d' avvertire che i quattro traguardi appartenenti alla prima forma della squadra debbano esser tutti quattro perpendicolari all' orizzonte, alloraquando si opera; altrimenti una retta che si farebbe tracciare sopra un terreno inclinato, nella direzione di due traguardi

obliqui, averebbe una falsa direzione, come è facile di convincersene in pratica.

54. Supponiamo intanto che si voglia levare F.21 la pianta di un campo *ABCDEF* per mezzo della squadra: si dovrà condurre nell'interno del campo, e nel senso della sua lunghezza, una retta *AX*, che chiamasi *base*, o *direttrice*. In seguito si abbassino da tutti gli angoli *B*, *C*, *D*, ec. delle perpendicolari su questa base, le quali converrà misurare, non meno che tutt'i segmenti, ch'esse formano sulla base *AX*, per mezzo di una catena, o in altro modo qualunque. Da ciò ne risulta che il terreno rimanga decomposto in tanti triangoli *AbB*, *Ddf*, ec. ed in altrettanti trapezii *BbcC*, *CcdD*, ec. che si possono facilmente riportare sopra un piano di disegno, ed anche determinarsene la superficie. Quando si sono prese le misure, converrà scriverle ne' loro luoghi rispettivi, in uno schizzo figurativo, come si osserva nella figura.

55. Per indicare intanto come si ritrovi per mezzo della squadra, il piede di una perpendicolare che si vuole abbassare; supponiamo che si voglia determinare il punto *b*, ove caderebbe la perpendicolare abbassata dal vertice *B*. Si situi il centro dell'istrumento nelle vicinanze del punto *b*, che ad occhio vedesi corrispondere al punto *B*, ed ivi diretti due de' traguardi nella direzione *AX*, si osservi se il punto *B* si ritrovi nella direziene degli altri due: se ciò non si verifica, converrà portare l'istrumento un poco a destra, o a sinistra, finchè si ritrovi il punto *B* nella giusta direzione; locchè non mancherà di ottenersi dopo pochi saggi, particolarmente se la persona che opera, sia molto esercitata in questo genere di osservazioni.

56. Se si trattasse di misurare un terreno inaccessibile al di dentro, ma che avesse il contorno libero, converrebbe in tal caso circoscrivervi un triangolo, un rettangolo, o un trapezio qualunque come apparisce dalle fig. 22, 23, 24: allora abbassando da' vertici degli angoli del terreno delle perpendicolari sopra le linee di operazione, e misurate le prime, e le seconde, non si mancherebbe di ottenere lo stesso intento, che precedentemente si è dimostrato potersi avere nella figura 21.

Questo è quanto potea dirsi circa i precetti della topografia che forma la prima parte di questo trattato, dovendosi ripetere dalla pratica la perfezione di questa scienza.

PARTE SECONDA.

DELLA LIVELLAZIONE.

57. È noto che la figura della terra sia sferica; e sebbene questa figura rimanga un poco alterata dallo schiacciamento de' poli, e dal gonfiamento delle parti equatoriali, pure questa leggiera alterazione non influisce giammai su le operazioni geodesiche, racchiuse tra piccole distanze.

58. La perfetta regolarità della superficie terrestre può solo ritrovarsi sul mare, dacchè le parti di questo fluido dovendosi mantenere in
f.25 equilibrio, si dispongono nella loro superficie *MN* ad eguali distanze dal centro *C* della terra. Lo stesso però non addiviene ne' varj punti *A*, *B*, ec. del continente, i quali elevandosi più o meno su la superficie *MN* del mare, vengono a discostarsi diversamente dal centro *C* della terra.

E siccome per indicare che due punti siano equidistanti dal centro della terra, o posti a disuguali distanze da esso, suol dirsi che abbiano *lo stesso*, o *diverso livello*: così dovrà dirsi che i punti della superficie del mare (almeno per una regolare distanza) siano tra loro allo stesso livello; mentre che due punti qualunque del continente possono avere lo stesso, o diverso livello tra loro.

59. Questa diversità di livello in molti casi è necessario che si conosca: così p. e. dovendosi condurre delle acque da un luogo in un altro, converrà che l' origine dello scolo sia nel luogo più alto, affinchè le acque animate dalla gravità discendano naturalmente verso il luogo più basso, ch'è appunto quello, che più si avvicina al centro della terra.

60. La scienza che insegna a conoscere questa differenza di livello, chiamasi *livellazione*, e la sua definizione deriva dalle seguenti considerazioni.

61. Riflettendo che la differenza tra le altezze disuguali Bq, ed Ap, che serbano rispet. i punti B, ed A dalla superficie del mare, eguagli la differenza delle loro rispettive distanze BC, AC dal centro della terra; si comprende esser lo stesso rapportare i due punti A, e B alla superficie del mare, che al centro C della terra.

Essendo in oltre $Bq-Ap=Dp-Ap$ (supposto esser BD una superficie concentrica a quella del mare, e destinata a passare per uno de' punti dati); si comprende che per conoscere la differenza di livello tra due punti, valga lo stesso il rapportarli alla superficie del mare, che ad una superficie parallela.

Considerando finalmente che la superficie sferica limitata tra' punti p, e q, o l'altra DB che l'è parallela, possano riguardarsi come superficie *piane orizontali*; qualora i punti p, e q siano vicinissimi tra loro, come sarebbe se l'angolo pCq fosse di 6″, o 7″; riflettendo, dico, a questa ultima circostanza, si scorge che la differenza di livello possa qualche volta ottenersi, con riportare i due punti tra lor vicini ad uno stesso piano orizontale, e paragonando le loro rispettive distanze da quello.

62. Diremo dunque: *che la livellazione sia una scienza che insegna a conoscere le distanze, che serbano più punti della terra da una superficie parallela a quella del mare, o da uno stesso piano orizontale.* Altri la definiscono per una scienza, *che insegna a conoscere le diverse distanze, che due o più punti della terra, serbano dal di lei centro.*

La prima è più adattata per esprimere i mezzi che si tengono per discovrire tal differenza; la seconda poi esprime meglio l'essenza della cosa che si ricerca.

LIVELLAZIONE TEORICA.

F. 3 63. Premesse queste idee generali, vediamo come si possa in teoria valutare la differenza di livello tra due, o più punti della terra. Sia A uno di questi punti, e per esso s'intenda condotta una superficie sferica BC, che abbia per centro il centro O della terra. Tutt' i punti D, E, ec. di questa superficie si dicono essere di *livello vero* col punto A; mentre serbano con esso un' egual distanza dal centro della terra.

64. Per lo stesso punto A s' intenda condotto un piano PQ tangente della superficie sferica BC, il quale sarebbe l' orizonte sensibile del punto A. Tutt' i punti M, N, ec. esistenti in questo piano, si dicono essere di *livello apparente* col punto A; mentre sembrano essere nelle stesse sue circostanze, laddove sono più discosti di esso dal centro O della terra. I punti poi M, ed M' equidistanti dal punto A, sebbene abbiano un livello più alto rispetto ad esso, sono purnondimeno nello stesso livello fra loro; e lo stessó dicasi per ogni altra coppia di punti N, N' equidistanti dal punto A, e situati nello stesso piano orizontale PQ.

65. Ciascuna delle rette MD, NE ec. frapposte fra la superficie sferica, e quella del piano, dicesi *differenza tra il livello vero, e l' apparente*, oppure *differenza del livello apparente sopra il livello vero* de' punti rispettivi M, N, ec.

66. Supponiamo ora che si paragoni il luogo A con l' altro N, visibile dalla stazione A per la direzione del raggio orizontale AN, e che si voglia conoscere quanto il livello dell' uno superi quello dell'altro. Essendo questa differenza di livello, espressa da NE, che nel tempo stesso è *differenza tra il livello vero ed apparente* del punto N; quando si sappia calcolar questa, si sarà anche risoluta la questione proposta. Nel triangolo rettangolo ANO il cateto AO dinota il raggio della sfera BC, la quale si considera essere la sfera terrestre, mentre il punto A o appartiene al mare, o ne dista ordinariamente per una distanza trascurabile rispetto alle dimensioni della terra. Essendo dunque il raggio me-

dio della terra di miglia italiane 3437,7 (1), il di cui log-mo è 3,5362738; ed esprimendolo in unità minori, sapendosi che contiene 3018730,3 canne napolitane, e metri francesi 6366198, della stessa lunghezza sarà il cateto AO, il quale dovrà perciò riguardarsi come cognito. L'altro cateto AN essendo tangente dell'arco picciolissimo AE, gli si può considerare come eguale, e quindi conoscersi mediante l'effettiva misura dell'arco AE, che separa il luogo A da un punto qualunque dell'eminenza EN. Conoscendosi dunque due lati, si calcola facilmente la retta $NE=NO-AO$; oppure considerandola come parte esterna della segante, con fare

$$AN^2=(2OE+NE)NE$$

E per dinotare generalmente questa formola, si ponga $AN=D$, $AO=R$, ed $NE=x$, sicchè sarà

$$x^2+2Rx=D^2$$

67. Da questa equazione destinata al calcolo delle differenze di livello, si ricavano le seguenti conseguenze.

1.° Facendo $D=5$ miglia, ed $R=3437,7$ si ritrova essere $x=0,0036$ di un miglio, che corrisponde a circa 25 palmi napolitani. Ad una distanza sì grande, che può dirsi non aver mai luogo nella livellazione, corrispondendo una differenza sì piccola di livello, siamo nel caso di trarne la conseguenza: *che ne' calcoli che biso-*

(1) Il raggio dell'equatore è di miglia 3445,5; quello de' poli è di 3432; la loro differenza è di miglia 11,5. Si è adottato il numero 3437,7 pel raggio medio della terra, per farlo corrispondere al grado medio di 60 miglia italiane.

gna fare per conoscere la differenza di livello tra due punti della terra, sia questa differenza sempre trascurabile rispetto al diametro della terra. Con questo principio l'equazione precedente diviene di primo grado, risultandone

$$x=\frac{D^2}{2R}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Con questa equazione semplicissima si calcolano facilmente le differenze di livello, avvertendo che il logaritmo di $2R$ espresso in metri, sia 7, 1049101.

2.° Per un' altra distanza D', dovendo essere

$$x'=\frac{D'^2}{2R}$$

Si ricava la seguente proporzione

$$x : x'=D^2 : D'^2$$

Cioè *le differenze de' livelli sono come i quadrati delle distanze.* Con questi pochi principj si è calcolata la tavola, che si osserva quì presso.

3.° Nell'equaz. (1) facendo $D=80$ canne, e $2R=6037460$, 6 canne, risulta $x=\frac{1}{2}$ minuto di palmo, ovvero uguale ad $\frac{1}{120}$ di palmo, che forma nella pratica una quantità quasi trascurabile. Facendo poi $D=47\frac{1}{2}$ canne, che corrispondono a 100 metri, si trova per x un valore sì piccolo, che si dovrà sempre trascurare come minore di uno di quegli errori inevitabili, che si commettono nelle operazioni pratiche.

Possiamo dir dunque, che in distanza di

100 metri, o di canne 48 dal punto A, non vi sia differenza tra livello vero ed apparente, per tutt'i punti situati sul piano orizzontale PQ: o dicendolo in altri termini: *una parte circolare della superficie terrestre, che abbia 100 metri di raggio, dee considerarsi come perfettamente piana; prescindendo dalle ineguaglianze del terreno.*

Tavola delle differenze tra il livello vero, ed apparente, corrispondenti a diverse distanze.

DISTANZE.	DIFFERENZE.	DISTANZE	DIFFERENZE.
metri	metri	metri	metri
100.	0,000786	1300.	0,13283
200.	0,00314	1400.	0,15406
300.	0,00707	1500.	0,17685
400.	0,01257	2000.	0,314
500.	0,01965	3000.	0,707
600.	0;02829	4000.	1,257
700.	0,038514	5000.	1,965
800.	0,050304	6000.	2,829
900.	0,063666	7000.	3,851
1000.	0,0786	8000.	5,030
1100.	0,09511	9000.	6,366
1200.	0,113184	10000.	7,860

Volendo ridurre i metri in palmi, e canne napolitane, e viceversa, potrà farsi uso delle seguenti equazioni, nelle quali P, o C dinotano

rispettivamente i palmi, e le canne contenute in una distanza di M metri; e queste si sono ricavate dal sapere, che il palmo, la canna, ed il metro sono tra loro come i numeri 1169, 9352, 4432, $\frac{96}{100}$. Ecco le due equazioni

$$P=M\left\{3,\ 79\right\}$$

$$C=M\left\{0,474\right\}$$

68. É raro che nel paragonare i livelli di due luoghi A, e C, uno di essi termini precisamente sull' orizzonte dell' altro: ma prescindendo dalle montagne, la di cui altezza si valuta con altri metodi, il più delle volte uno de' luoghi rimane nel punto C, al disotto dell' orizzonte AB dell' altro, e vi si dovrà ricondurre con situare nel punto C un' asta verticale guarnita in punta di un segnale, e producendola di tanto finchè il segnale apparisca sul raggio orizzontale AB. Misurando allora la distanza AD, o ricavandola dalla pianta del luogo, che supponiamo già fatta, si verrà a conoscere per mezzo del calcolo, o della tavola precedente, il valore di DB, da cui tolta la lunghezza BC dell' asta verticale, rimarrà noto il valore di DC, ch' è appunto la differenza di livello tra i punti A, e C. F. 27

Per esprimere questa differenza con una formola generale, si ponga $DB=A$, $BC=a$, $DC=D$, e sarà

$$D=A-a. \quad . \quad . \quad (1)$$

Se fosse negativo il valore di $A-a$, proverebbe che il luogo C stia al disotto della superficie

sferica, che passa per A, e perciò più vicino al centro della terra.

69. Due circostanze possono opporsi alla pratica di questa operazione, quando cioè la distanza D che separa i due luoghi, sia talmente grande da non potersi riprodurre uno di essi sull' orizzonte dell' altro; oppure se la natura del terreno vi frapponesse in mezzo un ostacolo da rendere i due luoghi invisibili tra di loro, tuttochè non separati da gran distanza. L' una, e l' altra circostanza si elude, con ricercare i livelli de' punti intermedj, e passando poi da questa conoscenza al paragone de' livelli de' punti estremi. Questo modo di operare, che dicesi *livellazione composta* a differenza della *livellazione semplice*, che stiamo attualmente trattando, sarà chiarita in appresso con un problema particolare.

70. Ritornando ora al primo argomento, facciamo riflettere, come la *refrazione* debba alterare la posizione dell' oggetto B, con farlo comparire sul piano orizzontale AB, sebbene vi sia realmente al di sotto nel punto b. I geometri moderni occupandosi della *refrazione terrestre*, han ritrovato che alla temperatura media, il suo effetto sia di alzare un oggetto per quasi un sesto della differenza BD tra il livello vero, ed apparente: e propriamente chiamando r la refrazione, ed A questa differenza BD, dovrà essere

$$r = (0,16)A \ldots (2)$$

Alla distanza di 100 metri essendo $A=0$, sarà pure $r=0$: *Cioè gli oggetti lontani per 100 metri non sono affetti da refrazione.*

71. Dalle cose fin quì dette, si comprende

chiaramente, che per avere il valore della retta DC, bisogni dalla DB toglierne due quantità, cioè la lunghezza Cb dell' asta, e l' effetto bB della refrazione. In tal guisa l' equazione (1) acquisterà la seguente forma

$$D=A-\left\{(0,16)A+a\right\}$$

ovvero

$$D=(0,84)A-a\ldots(3)$$

72. La refrazione essendo un elemento variabile, perchè dipendente dallo stato dell'atmosfera; ed il valore di A potendo andar soggetto a qualche errore come dipendente da una distanza da misurarsi sul terreno, si è da' geometri escogitato il modo da rendere il calcolo della livellazione esente da queste due quantità, e ciò con farsi l' osservazione non più in uno de' luoghi, de' quali si paragona il livello, ma nel mezzo della loro distanza, e propriamente nel punto A equidistante da essi. Così p. es. volendosi calcolare la differenza di livello de' luoghi C, e C', converrà situarsi nel punto A, che divide per metà la distanza CAC', e per mezzo delle aste verticali, riportare i detti luoghi sull' orizzonte del punto A. In tal modo essendo uguali dall' una, e l' altra parte le rette BD, $B'D'$, non meno che le rispettive refrazioni, dovranno queste quantità uguali svanire nel prender che si fa la differenza delle due altezze DC, e $D'C'$. In fatti chiamando D, e D' le altezze DC, e $D'C'$, dovrà essere $D-D'$ la differenza di livello tra i due luoghi C, e C': ma è altronde

$$D=(0,84)A-a$$
$$A'=(0,84)A-a'$$

Sarà dunque

$$D-A'=a'-a \quad . \; . \; . \; (4)$$

Dunque possiamo dire : *che facendosi una stazione nel mezzo di due oggetti rapportati all'orizonte del punto medio, sia la differenza delle aste verticali uguale alla differenza de' loro livelli.*

Se non fosse possibile il situarsi nel mezzo de' due luoghi C, C', bisognerebbe misurare le due distanze AD, AD', e ritrovandole ciascuna maggiore di 100 metri, si dovrebbero calcolare separatamente i valori delle rette DB, $D'B'$ secondo l' indicazione dell' equazione . . . (3), e poi prenderne la differenza. Per es. Se questi valori sieno dinotati da D, e D', sarebbe $D-D'$ la differenza di livello tra i due punti C, e C'.

Quì finiscono i precetti della *livellazione teorica*; passiamo intanto a trattare degl' istrumenti che la riguardano, o sia della *livellazione pratica*; per venir poi a' problemi, che metteranno in veduta tutte le regole sì pratiche, che teoriche, senza aver bisogno di dimostrazione.

LIVELLAZIONE PRATICA.



Descrizione delle livelle.

73. Per procurarsi la direzione de' raggi visuali ed orizontali, i quali costituiscono la posizione del piano orizontale AB della figura 27, si adoprano tre specie di livelle, *ad acqua*, *a cannocchiale*, *ed a bolla d' aria.* Avendo esaminata quest' ultima, andiamo a parlare delle altre due.

74. *La livella ad acqua* consiste in un cilindro vuoto *MN* di metallo, piegato ad angolo retto ne' suoi estremi, affin di riceverli due vasi *F'*, *F'* di cristallo, egualmente cilindrici, e che vi si debbono unire per mezzo di un glutine, o con altro ordegno, affin di rendere la macchina più sicura. F. 28

Il cilindro *MN* è situato sopra di un piede a tre gambe, in modo da poter liberamente girare per tutte le direzioni.

Per servirsi di questa macchina, si versa dell' acqua in uno de' vasi *F*, *F'*, la quale si comunica all' altro, traversando la cavità del cilindro *MN*: bisogna poi versarne di tanto, che ella ricolmi circa $\frac{2}{3}$ della parte esterna de' vasi di cristallo. Quando il fluido si è riposato, le due superficie dell' acqua si ritrovano a livello tra loro per la nota proprietà de' fluidi. Situandosi allora a piccola distanza dalla macchina, e diriggendo un raggio visuale *or*, che rada le superficie estreme dell' acqua, con essere tangente alla convessità de' vetri, si è sicuro che questo raggio sia orizzontale.

La qualità necessaria che deve aver questa macchina, consiste nella perfetta eguaglianza de' diametri de' due vasi di cristallo; senza di che potrebbe avvenire, che girando lateralmente la livella, il nuovo raggio visuale fosse orizzontale al pari del primo, ma giacente in un piano diverso. Ciò accade sicuramente, se l' asse *PR* di rotazione non sia perfettamente verticale in una delle posizioni della macchina, o manchi di essere perpendicolare all' asse del cilindrio *MN*. Per assicurarsi intanto dell' eguaglianza di questi diametri, converrà inclinare la livella, e vedere se l' altezza che guadagna il fluido in uno de'

vasi , sia perfettamente uguale alla depressione che soffre nell' altro.

Bisogna anche badare che nell' acqua non vi rimanga dell' aria , mentre una bolla d' aria contenuta in un braccio del tubo ricurvo, farebbe alzar l' acqua in questo più che nell' altro , ad oggetto di equilibrare le due colonne. Per evitare questa circostanza, si ottura uno de' vasi di cristallo, e s' inclina la livella quasi verticalmente : essendovi dell' aria nel fluido, questa per la sua leggerezza scapperà fuori per l' apertura dell' altro vaso.

Finalmente per non equivocare nella direzione della visuale , bisogna colorir l' acqua con una sostanza capace di alterare sensibilmente la chiarezza di questo fluido.

75. La livella ad acqua è buona per le distanze di 20, 30, o 40 canne in circa, secondo la veduta più o meno buona dell' osservatore. Ma per una distanza maggiore , conviene adoprare *la livella a cannocchiale* , la quale consiste in
F.29 un cannocchiale AB guarnito di micrometro, e montato nella maniera seguente.

Un piano circolare CD, cui sono annessi i tre piedi dell' istrumento, costituisce la base della montatura.

Al di sopra vi è un piattino cd , al quale è avvitato ad angolo retto, un asse verticale xy, che può diversamente inclinarsi su l' immobile base CD , mediante il giuoco di una noce , e l' azione di quattro viti che premono sulla stessa base.

Sulla faccia superiore del piattino è avvitato solidamente un cilindro EF, scavato a cono, dentro di cui gira con dolce attrito , un cono eguale connesso con la traversa, o riga ori-

zontale PR. In tal modo questa riga può muoversi in giro senza che il cilindro EF, ed il piattino cd partecipino del suo movimento.

Alla traversa PR è avvitata una livella a bolla d' aria pr, capace di diverse inclinazioni mediante l' azione di due viti.

Finalmente su gli estremi della riga PR sorgono due braccia verticali, terminate ne' due collari H, I, ne' quali si adatta il cannocchiale AB.

Per l'esattezza di questa macchina si richiede, che l' asse xy ed il cilindro EF siano perpendicolari a' piani cd, e PR, locchè dipende dalla costruzione. Per l' uso poi della macchina si ricerca, che l' asse della livella pr, e la riga PR siano paralleli tra loro, e che si conservino orizontali in tutte le direzioni, alle quali si rivolga il cannocchiale AB. Debbono finalmente le braccia PL, ed RM del cannocchiale essere uguali tra loro. Queste rettificazioni si procurano alla macchina nel seguente modo.

1.° Si dispone orizzontalmente la base CD per mezzo de' piedi dell' istromento, ed a stima di occhio.

2.° Si fermano sopra di CD le quattro viti in maniera, che la riga PR si conservi ad un dipresso orizontale in tutte le direzioni.

3.° Si dispone la riga PR nella direzione di due viti opposte, che poggiano sopra la base CD, e per mezzo di queste due viti si mette la livella in equilibrio. Poi si fa fare una mezza rivoluzione alla riga PR, e si corregge il disquilibrio della livella (se mai vi esista), metà con le sue viti, e metà con le viti della base CD: e ciò si replichi finchè nella livella non apparisca disquilibrio. Allora si è sicuro che le braccia

della livella siano uguali, ed il suo asse paralle-lo a *PR*.

4.° Senza più toccare le viti della livella, si muoverà la riga *PR* per tutte le direzioni, rimettendo il disquilibrio della livella per mezzo delle quattro viti della base *CD*. Quando l'equilibrio si conserva per tutte le direzioni, è ciò un segno che la riga *PR* sia orizontale in tutti i sensi.

5.° Si passa poi ad uguagliare le braccia *PL*, *RM* del cannocchiale, con diriggerlo ad una mira simile a quella che mostra la figura 30, e situata a regolare distanza. Si mette il filo orizontale del micrometro nella direzione della linea *CN*, che separa i due colori della predetta mira. Indi si toglie il cannocchiale da' collari *H*, *I*, ne' quali si trova adattato, e si situa in direzione opposta, cioè con l'oggettiva rivolta all'osservatore. Fatta descrivere una mezza rivoluzione alla riga *PR*, si tornerà a guardare la mira per mezzo del cannocchiale, ed essendovi distacco tra il filo orizontale, e la linea *CN* de' colori, la metà di questo errore si correggerà con le viti delle braccia del cannocchiale, e l'altra metà con alzare, o abbassare la mira predetta. Replicato più volte lo stesso saggio, e non trovandosi divario tra il filo e la mira, si è sicuro della eguaglianza delle braccia *PL*, *RM*; e la macchina rimane rettificata in tutte le sue parti.

Verificata in tal modo la macchina si potrà allora usarne con sicurezza, e diriggere il raggio visuale a traverso della intersezione de' fili del micrometro, verso l'oggetto che si vuol mirare. Questo raggio apparterrà al piano tangente di quella sfera ideale, che passerebbe per l'occhio dell'osservatore.

Descrizione dell' asta di mira.

76. Questo ordegno è formato da due righe *AB*, *CD* di legno di zappino, o di noce secca, ed aventi la stessa lunghezza. Sono talmente disposte tra loro che la riga *CD* si può alzare, o abbassare, percorrendo con dolce attrito un corrente praticato nel mezzo della riga *AB*, la quale è destinata a poggiare con la sua base *BE* sopra il terreno, ed ivi sostenuta dalla mano dell' operatore, reggersi verticalmente. F.30

Ciascuna delle due righe ha circa l' altezza di una canna, e questa lunghezza è segnata in palmi, once, e minuti sulla riga immobile *AB*, cominciando la divisione da *A* verso *B*. In cima della riga mobile vi è situata una *mira M*, consistente in un palmo quadrato di cartone, o di legno sottile, o meglio ancora di latta, diviso in due metà, una di color bianco, e l' altra di color nero: avvertendo che l' origine superiore della riga *CD* debba passare per la divisione orizontale *CN* de' colori, alla quale deve ancora diriggersi il raggio visuale, regolato dalla livella.

Se il raggio di mira passi al di sopra del punto *A*, si dovrà continuamente sollevare la riga *CD*, finchè l' osservatore che guarda a traverso della livella, non esprima per mezzo di un segno convenuto, che la mira sia nella giusta posizione.

Allora si ferma l' asta mobile per mezzo di una vite di pressione situata in *P*, e si legge nella divisione laterale qual numero di palmi, once, e minuti, sia contenuto nello spazio *AD*. Chiamando *n* qnesto numero, ed *a* la lunghezza dell' asta *AB*, sarebbe $2a-n$ l' intervallo che separa il punto *C* della mira dal punto *B* del terreno.

Se poi il raggio visuale passi al di sotto del punto A, si capovolge la riga mobile, e si replica la stessa operazione.

77. Tutte le volte che con una sola stazione, si può determinare l' altezza di due punti, questa determinazione dicesi *livellazione semplice*; e le due osservazioni che si fanno con la livella diriggendola a due diversi punti di mira, saranno indicate col termine di *osservazione a destra*, *ed osservazione a sinistra*: siccome indicheremo *con altezza a destra*, *ed altezza a sinistra* le rispettive lunghezze delle aste situate nell' uno, e l' altro senso.

Ma se i due punti da livellarsi fossero al di là de' limiti dell' estensione del raggio visuale, oppure il terreno presentasse una grande ineguaglianza, o un considerabile pendìo, si è obbligato allora di unire i due punti proposti per mezzo di una serie di livellazioni semplici: quale operazione dicesi *livellazione composta*.

Mostreremo perciò con due problemi diversi, come si debba operare nel primo, e nel secondo caso.

Probl. I.

Determinare la differenza di livello tra due punti visibili A, B, per mezzo di una livella ad acqua, o a cannocchiale.

78. Soluz. In questo problema distingueremo due casi, secondocchè la stazione si faccia
F.31 nel mezzo de' punti A, e B, o in uno di essi.

Caso 1.° Il metodo più semplice, e nel tempo stesso più esatto, è di situare la livella CP nel mezzo de' punti A, e B, ed a distanze

uguali da essi, affin di evitare le correzioni dovute alla refrazione, ed alla differenza del livello apparente sopra il livello vero (72). Non è però necessario che il punto C di stazione appartenga alla retta ab che unisce le due mire, potendosi situare francamente il livello nel punto P' del terreno (fig.32), in modo però che i raggi orizontali $C' a'$, $C' b'$, siano tra loro uguali, qualunque fosse l'angolo $a' C' b'$ ch' essi comprendono tra di loro. Prescindendo dunque da questa circostanza, che non altera punto il problema, supponiamo esser P il punto di stazione situato ad egual distanza da A e B; e che l'asta siasi situata verticalmente nel punto A. Si farà per mezzo di una convenzione di segni, alzare o abbassare la mira, finchè il raggio visuale passi esattamente per il suo mezzo: sarà questa *l'osservazione a sinistra.* In seguito si leggerà sulla riga l'altezza Aa, che si noterà sopra un registro destinato per uso della livellazione. Senza spostare il piede dell'istromento, e senza perdita di tempo, si farà trasportare la mira nel punto B, ed ivi si eseguirà *l'osservazione a destra*, con diriggere un raggio orizontale, che proceda dal punto C verso il punto b, situato nel mezzo della mira. Ottenuta l'altezza Bb, si registrerà questa al pari della prima, e le osservazioni saranno terminate.

Se le due distanze Ca, Cb comunque grandi, siano tra loro eguali; o non avendole potuto rendere eguali, sia ciascuna di esse minore di 48 canne (67); sarà sempre la differenza tra le due altezze Aa, Bb la differenza di livello tra' punti A, e B: ed il punto più alto sarà quello cui corrisponde l'asta più corta. Lo stes-

so dicasi delle distanze $C'a'$, $C'b'$ poste ad angolo tra di loro.

Caso 2.° Se le circostanze non permettono di situare la livella in un sito diverso da' punti A, e B; si farà in tal caso una sola osservazione, e la differenza di livello si dovrà ricavare nel seguente modo.

Supponiamo che la livella siasi situata nel F.33 punto A, e l'asta verticale nel punto B; e supponiamo ancora che la distanza Cb che separa questi due punti, sia minore di 48 canne. Dal punto C si dirigga il raggio orizzontale Cb che passi pel mezzo b della mira. Poi si osservi l'altezza Bb dell'asta, e si misuri per mezzo di un filo a piombo l'altezza mn che serba il raggio orizzontale sopra il terreno nA. La differenza di queste due altezze dinoterà quanto sia più alto quel punto, al quale corrisponde l'altezza minore.

Se poi la distanza tra' punti A, e B sia F.34 comunque maggiore di 48 canne, si farà situare un'asta verticale nel punto B, e se ne osserverà la *mira* per mezzo della livella a cannocchiale situata in A, ed avente per altezza Am. Misurata sul terreno la distenza AB, che separa i due luoghi, o ricavatala dalla pianta, che forse potrebbe esistervi, si calcoli da essa il valore di nb differenza tra il livello vero ed apparente, che io dinoto per A. Dal valore di A si tolgano due quantità, cioè la refrazione $=(o,16)A$, e la lunghezza dell' asta$=a$; il residuo D esprimerà la differenza di livello tra il punto B, ed il punto m dell'osservazione : cioè sarà

$$D=Bn=(o,84)A-a.$$

Ma siccome si paragona il punto B col punto A, così bisogna tener conto dell' altezza Am della

livella con dinotarla con l, e con aggiungerla al valore di D. Allora la vera differenza D' di livello tra' punti A, e B si avrà dalla seguente equazione.

$$D' = BB' = (0,84)A + l - a.$$

Se il valore di D' sia positivo, dinoterà l'altezza del punto B sopra di A; se poi sia negativo, dinoterà la depressione del punto B rispetto ad A.

Esempio.

79. *Sia la distanza* AB *di 320 canne.*

Sapendosi che alla distanza di 100 canne, la differenza tra il livello vero, ed apparente sia di $\frac{4}{5}$ di un minuto, si farà (67)

$$100^2 : 320^2 = \tfrac{4}{5} : 8,19$$

Dunque A = *oncia 1, minuti 3, 19.*

Sia inoltre l'altezza del livello sopra il terreno di palmi 4, ed once 2; e finalmente sia l'altezza della mira situata in B *di palmi 7, once 3, e minuti 4.*

Sarà $(0,84)A$ = oncia 1, minuti 1, 88.

l = palmi 4, onc. 2, minuti 0.

a = . . . 7, . . . 3 4

pal. onc. min.

$$D' = -\left(3,\ 0,\ 2\tfrac{12}{100}\right)$$

Cioè il punto B *è più basso del punto* A *di 3 pal., 2 min.* $\frac{12}{100}$.

PROBL. II.

Determinare con una livellazione composta la differenza di livello tra due punti invisibili A, e B.

80. Soluz. Quando non si voglia conoscer altro, che la sola differenza di livello, si dovrà operare a questo modo.

1.° Si prescelga quella direzione che più comodamente conduca da *A* verso *B*, e che obblighi a fare il minor numero possibile di stazioni: niente curando la tortuosità del camino, della quale non si dovrà tener conto, come di cosa che niente influisce sul problema. F.35

2.° Supposto essere la linea *AMPB* la direzione adottata, si prescelgano in essa le stazioni *L*, *M*, *N*, *P*, *O*, *R*, che nel caso della figura procedono da sinistra verso destra. Queste stazioni costituiscono una serie di *livellazioni semplici*, unite in modo tra loro, che ciascuna è legata con la precedente per mezzo di una medesima asta, la quale serve nel tempo stesso per l'*osservazione a destra* in una stazione, e per l'*osservazione a sinistra* nell'altra.

3.° In ogni stazione si dovrà situare la livella a distanze uguali dalle aste: ben vero, che se tali distanze siano rispettivamente minori di 48 canne, non debbano nè misurarsi, nè perfettamente uguagliarsi tra loro (1). Se poi ne siano comunque maggiori, si dovranno misurare ad oggetto di renderle uguali, e così evitare il

(1) Le distanze alle volte si giudicano ad occhio; ed alle volte si rilevano dalle notizie topografiche che si hanno del locale, o da' rapporti degli abitanti.

calcolo delle differenze de' livelli veri, ed apparenti (67).

4.° In ciascuna stazione dopo aver diretto il raggio orizontale verso la mira situata a sinistra, si dovrà misurarne l'altezza, e notarla sopra uno schizzo simile a quello che presenta la figura: allora si toglie l'asta dal sito, a cui si è traguardato, e si trasporta nel luogo opposto, per farvi l'osservazione a destra. Passando poi da una stazione all'altra seguente, non si dovrà rimuovere l'asta dal sito, ove si ritrova; ma solamente si dovrà sollevare, o abbassare la mira, secondo il bisogno.

5. Se in qualche stazione non si possa situare l'istromento nel mezzo; in tal caso l'altezza della livella terrà luogo di una delle due altezze verticali, da notarsi sul registro; e si dovrà evitare che la distanza tra la livella, e l'asta corrispondente a questa stazione, superi le 48 canne.

6. Se il terreno fosse molto inclinato, la livellazione si dovrà regolare dal basso verso l'alto; poichè procedendo in tal modo, il raggio di mira incontra a conveniente distanza, se non altro, il terreno, come lo dimostra la figura nella stazione *N*: laddove procedendo dall' alto verso il basso, il raggio di mira qualche volta a piccole distanze, non giunge ad incontrare le aste estese il più ch' è possibile.

Regolate le operazioni nel modo predetto, e segnati sopra dello schizzo i diversi valori delle altezze verticali delle mire, si osserverà che ogni asta, all'infuori della prima e l'ultima, abbia due numeri uno a destra, e l'altro a sinistra, per dinotare le rispettive osservazioni fatte a sinistra, ed a destra.

Fatta la somma de' numeri notati a destra delle aste, che per maggior chiarezza chiamerò *somma delle altezze verticali a sinistra* ; ed un' altra de' numeri notati a sinistra, che chiamerò *somma delle altezze verticali a destra* ; si prenda la differenza di siffatte somme, e questa dinoterà la differenza di livello de' punti estremi *A*, e *B*. Avvertendo, che se la prima somma sia la maggiore, il punto *A* situato a sinistra, debba essere più basso di *B* : viceversa risultando la prima somma minore dell' altra, il punto *B* sarebbe più basso del punto *A*.

81. Per darne un esempio, serviamoci de' numeri segnati nella figura.

Altezze verticali a sinistra.			*Altezze verticali a destra.*		
pal.	onc.	min.	pal.	onc.	min.
4	2	3	2	0	0
3	0	0	4	0	2
2	9	0	2	0	4
5	2	1	6	9	3
1	2	0	8	8	4
3	1	2			
19	5	1	23	7	3

	23	7	3
	19	5	1
Differenza	4	2	2

Dunque il punto *B* è più basso di *A* di 4 palmi, 2 once, e 2 minuti.

La dimostrazione n' è la seguente.

Dinotiamo con a, a', a'', ec. le altezze situate a destra delle aste, e con b, b', b'' ec. quelle situate a sinistra. Sarà $a-b$ la depressio-

ne del punto A rispetto a C, siccome $b'-a'$ esprimerà quella di D rispetto allo stesso punto C. Paragonando dunque i punti A, e D, sarà la depressione di A rispetto a D dinotata da $(a-b)-(b'-a')=(a+a')-(b+b')$.

L' altezza del punto E rispetto allo stesso punto D è dinotata da $a''-b''$, come apparisce dalla figura; dunque paragonando A con E, si troverà essere la depressione di A rispetto ad E, espressa da $(a-b)-(b'-a')+(a''-b'')=(a+a'+a'')-(b+b'+b'')$: e così in seguito.

Avvertimento.

82. Quando la linea *AMRB* della livellazione fosse destinata all' esecuzione di qualche progetto, o di qualche travaglio da eseguirsi, non sempre può prendersi ad arbitrio, ma il più delle volte è necessario, che sia contenuta in uno stesso piano verticale; e non potendosi ciò ottenere, bisogna almeno conoscere gli angoli che formano tra di loro le diverse sue parti, e misurare le distanze orizontali, che si frappongono fra due aste di mira, come apparisce dalla figura. Si sarebbe in tale circostanza, se si cercasse il profilo di un terreno, o di un' opera di fortificazione; se si volesse costruire un canale di navigazione, o deviare il corso di un ruscello per formare un' inondazione d' intorno ad una piazza forte. In simili casi si dovrà cominciare dal prendere la pianta del terreno sul quale si dee eseguire il progetto, e poi marcare la direzione della linea *AMRB*, per mezzo di picchetti situati a fior di terra.

83. Se un corpo, o una superficie sia tagliata da un piano verticale condotto per una data direzione; il disegno che si farebbe della comune sezione, chiamasi *profilo*.

Nella scienza della livellazione si eseguiscono i profili de' terreni, o delle opere di fortificazione, mediante la conoscenza de' livelli de' diversi punti di dette superficie, presi secondo una data direzione. Come si debba poi eseguire il disegno con l' ajuto di tal conoscenza, si rileva da' seguenti problemi.

PROBL. III.

Fare il profilo di un terreno di cui si è levata la pianta, per una direzione di corto intervallo.

F.36 84. SOLUZ. Sia APB la direzione, secondo la quale si cerca il profilo di un terreno irregolare, e limitato tra i punti A, e B.

Si situi la livella nel punto P quasi nel mezzo de' punti estremi A, e B; e poi si vada situando successivamente l' asta di mira ne' punti A; C, D, E, F, B, situati in una medesima direzione; diriggendovi sempre lo stesso raggio orizontale, senza mai spostare l' istromento.

Indi si misurino l' altezza OP della livella, le altezze Aa, Cc, Dd ec. della mira, e le distanze orizontali, che si frappongono fra i punti A, C, D, ec. Fatto un registro di questi valori, o piuttosto segnatili sopra uno schizzo simile a quello della figura; si tiri sopra il foglio di disegno una retta orizzontale ab, sulla quale si

prendano delle parti *ac*, *cd*, *dO*, ec. rispettivamente uguali alle distanze orizzontali, e ciò per mezzo di una scala già costruita per uso del disegno. Da' punti *a*, *c*, *d*, ec. alzando delle perpendicolari sulla retta *ab*, si prendano su di esse delle lunghezze rispettivamente uguali alle altezze verticali della mira. I punti estremi *A*, *C*, *D*, ec. rappresenteranno il corso del terreno, e le sue ineguaglianze. Quando il terreno fosse leggiermente ondoso, e le diverse pendenze fossero linee di piccola curvatura, giova alla speditezza del disegno, il prendere le distanze orizzontali *ac*, *cd*, ec. tutte uguali tra loro. Quando poi il terreno offrisce delle disuguaglianze disordinate, o si trattasse di un' opera di fortificazione, bisogna situar l' asta ne' luoghi dove l' ineguaglianza è più sensibile. Le altezze delle aste essendo molto piccole in riguardo alle distanze orizzontali, bisogna far uso nel disegno di due scale, una moltiplice dell' altra: la più piccola servirà per le distanze orizzontali, e la più grande per le altezze verticali.

PROBL. IV.

Fare il profilo di un terreno di cui si è levata la pianta, per una direzione di lungo intervallo.

85. SOLUZ. Sia *APB* la data direzione, e su di essa si esegua una livellazione composta, secondo i precetti del problema 2.° procurando però che le diverse stazioni siano in uno stesso piano verticale, per quanto è possibile; e con aggiungervi l' esatta misura delle distanze orizzontali, limitate da dette stazioni. Si a· ·nentino F.35

i valori delle rispettive altezze delle mire, in modo che vadan tutte a terminare ad una stessa retta orizzontale, ad oggetto di rapportare i diversi punti del terreno ad una stessa linea di livello. Tale aumento dovrà darsi nel seguente modo.

Si prenda per il primo punto *A* un' altezza verticale *A A'* di tal lunghezza, che l' orizzontale *A'B'* condotta per il suo estremo, passi al di sopra del punto più alto del terreno. Questa lunghezza che supponiamo esser di 30 palmi, si dirà *la prima verticale ridotta*, e si dovrà sostituire invece della vera, che contiene 4 palmi, 2 once, e 3 minuti. Per distinguerle poi, le chiameremo *verticale ridotta a sinistra, e verticale vera a sinistra.* Si prenda la loro differenza, ch' è di palmi 25, once 9, e 2 minuti, e si aggiunga alla verticale a destra corrispondente alla prima stazione, e che conteneva solamente 2 palmi. Ciò si dee praticare per uguagliare i livelli delle nuove verticali. Con tale aggiunta la seconda verticale trovasi ridotta alla lunghezza di 27 palmi, 9 once, e 2 min., e si dovrà chiamare *seconda verticale ridotta.* Si ripeta lo stesso per la seconda stazione, cioè si prenda la differenza tra la seconda verticale ridotta, e la verticale vera a sinistra, ch' è di palmi 3, e la loro differenza di palmi 24, 9 once, e 2 minuti si aggiunga alla verticale vera a dritta, che conteneva 4 palmi, e 2 minuti. Avute a questo modo le verticali ridotte per i tre punti *A*, *C*, *D*, si prosegua a far lo stesso in tutte le altre stazioni.

Per non equivocare, ecco la regola generale: *in ogni stazione si prenda la differenza tra la verticale ridotta, e la vera, amendue*

corrispondenti a sinistra ; e questa differenza si aggiunga alla verticale vera a destra della medesima stazione.

86. Al piano di riduzione potrebbe darsi la seguente forma.

Verticali vere			*Verticali ridotte*
	30. 0. 0.		1.ª 30. 0. 0.
1.ª a sinistra	4. 2. 3.		
	25. 9. 2.	Dif.	
1.ª a destra	2. 0. 0.		
	27. 9. 2.	Som.	2.ª 27. 9. 2.
2.ª a sinistra	3. 0. 0.		
	24. 9. 2.	Dif.	
2.ª à destra	4. 0. 2.		
	28. 9. 4.	Som.	3.ª 28. 9. 4.
3.ª a sinistra	2. 9. 0.		
	26. 0. 4.	Dif.	
3.ª a destra	0. 0. 0.		
	26. 0. 4.	Som.	4.ª 26. 0. 4.
4.ª a sinistra	5. 2. 1.		
	20. 10. 3.	Dif.	
4.ª a destra	2. 0. 4.		
	22. 11. 2.	Som.	5.ª 22. 11. 2.
6.ª a sinistra	1. 2. 0.		
	21. 9. 2.	Dif.	

5.ª a destra. .	6. 9. 3.	
	28. 7. 0. Som.	6.ª 28. 7. 0.
6.ª a sinissra.	3. 1. 2.	
	25. 5. 3. Dif.	
6.ª a destra. .	8. 8. 4.	
	34. 2. 2. Som.	7.ª 34. 2. 2.

Ridotte in tal guisa le altezze verticali alla stessa linea di livello, e misurate le distanze orizzontali delle diverse stazioni; si dovranno seguare i numeri corrispondenti sopra lo schizzo, ne' luoghi indicati dalla figura. Allora si potrà venire alla formazione del profilo, a norma de' precetti esibiti nel problema precedente.

87. Se si volesse conoscere le ineguaglianze
F 37 di un terreno *ABCDE*, affin di rettificarlo; converrebbe prima levarne la pianta, e poi eseguirvi delle successive livellazioni, tanto per le direzioni parallele *mn*, *pq*, ec., che per le direzioni *rs*, *tv*, ec. perpendicolari alle prime. In seguito si dovrebbero da queste livellazioni ricavare i corrispondenti profili, rapportandoli a delle linee di livello situate in uno stesso piano orizzontale. In tal guisa si verrebbero a conoscere i livelli di moltissimi punti del terreno, i quali si potrebbero poi modificare secondo la forma, e la direzione, che si vorrebbe assegnare alla superficie del terreno predetto. Chi desidera chiarirsi meglio su tale teoria, consulti la *Geometria pratica del Caravelli, e la Topografia del Puissant.*

Maniera di calcolare le altezze de' monti, e degli edifizj

88. Tre sono i metodi che ordinariamente si adoprano per tale ricerca, quello cioè della *livellazione*, il *metodo trigonometrico*, ed il *barometrico*. Noi andremo partitamente ad esporli, con quella brevità che comportono gli elementi.

Metodo della livellazione.

89. Dal primo, e dal secondo problema che abbiamo esposti nel trattare della livellazione, si ricavano le regole, onde conoscere le altezze de' monti. Il primo problema insegnando a ritrovare la differenza di livello tra due punti visibili, e molto discosti tra loro, con fissar la stazione in uno di essi, potrebbe adattarsi alla predetta ricerca, qualora la natura del luogo, e l'altezza del monte lo permettessero. Lo stesso dicasi del secondo problema: in fatti se il pendìo AC di una montagna fosse accessibile, niente più facile, che formarvi di sopra una livellazione composta, servendosi de' punti a, b, c, ec. della montagna medesima, per oggetti di mira; e poi ricavare l'altezza ignota AD dalla somma delle aste situate a sinistra. F. 38

Metodo trigonometrico.

70. Sia BB' l'altezza che si ricerca, ed A un punto situato nel piano, da cui è visibile il vertice B del monte. Si ricavi dalla pianta, che supponiamo esser già fatta, la lunghezza dell' arco AB' di cerchio massimo, frapposto fra le F. 39

due verticali CZ, CZ'. Considerando la terra sferica, si può dalla distansa AB' conoscere il valore dell'angolo ACB' formato nel centro della terra, che noi chiameremo C. Sarà dunque

$$\text{Ang. } ACB' = C. \ldots . . (1)$$

Poi si misuri l'angolo ZAB, distanza al zenit del punto B: e siccome l'osservazione non esibisce il vero angolo, a causa della refrazione, così chiamando D la distanza vera ZAB, S l'apparente, ed r la refrazione, dovrà essere

$$D = S + r \ldots \ldots . (2)$$

Si avverta che l'angolo D è ordinariamente maggiore di 79°.

Dal conoscersi il raggio AC della terra, che io dinoto per R, ed il valore dell'angolo $ACB' = C$, si può calcolare la lunghezza della corda AB', che si esprima per K; dovendo essere

$$K = 2R \text{ sen.} \frac{C}{2} \ldots . . (3)$$

Ciò premesso, nel triangolo ABB' l'angolo $AB'B$ può riguardarsi come retto, senza sensibile errore. Dunque ritenendo i simboli precedenti, e chiamando A l'altezza ricercata BB', dovrà risultare

$$A = K \text{ cot. } ABB'$$

Vediamo intanto come si possa esprimere l'angolo ABB' in funzione di S, ch'è la distanza zenitale osservata. L'angolo $ZAB' = 90° + \frac{1}{2}C$, e l'angolo $ZAB = D$. Dunque $BAB' = ZAB' - ZAB = 90° - (D - \frac{1}{2}C)$. E siccome l'angolo ABB' è complemento di BAB', dovrà essere

$$ABB'=D-\tfrac{1}{2}C=S+r-\tfrac{1}{2}C.$$

E riponendo questo valore nell'equaz. precedente, sarà

$$A=K\cot.\left\{S+r-\tfrac{1}{2}C\right\} \ldots (4)$$

Per risolvere questa equazione, bisogna conoscer solamente il valore della refrazione r. I matematici moderni per mezzo di esperienze esattissime, hanno ritrovato il seguente valore di r, nell' ipotesi che l' angolo S non sia minore di 79°; cioè

$$r=nC \ldots (5)$$

Le osservazioni eseguite in Francia dal sig. ***Delambre***, provano che nell' està sia $n=0,075$; in autunno, e primavera sia $n=0,08$; e che nel verno varj il valore di n da 0,09 sino a 0,10.

Esempio.

91. Sia l' arco $AB'=12$ miglia, $S=88.°$ 13'. 2'', $n=0,08$. Si cerca l' altezza BB' di un monte. Essendo l' angolo $ACB'=12'$, ed il raggio AC della terra $=3437,7$ miglia, risulta

$$K=2.\ 3437,7 \text{ sen. } 6'$$

$$\text{Log. } 2=0,3010300$$
$$\text{Log. } 3437,7=3,5362738$$
$$\text{Log. sen. } 6'=7,2418771$$
$$\text{Log. } K\ldots=1,0791809$$
$$r=nC=(0,08)\ 12'=57'',6.$$
$$S+r-\tfrac{1}{2}C=88.°\ 8'.$$

*

Dunque sarà

$$BB' = K \text{ cot. } 88.^\circ\ 8'.$$

$$\text{Log. } K = 1{,}0791809$$
$$\text{Log. cot. } 88.^\circ\ 8' = 8{,}5130978$$
$$\text{Log.} BB' = 9{,}5922787$$

D' onde apparisce che l' altezza del monte sia più di un terzo di miglio; e propriamente contiene 0,3911 di miglia = 2747 palmi napolitani.

92. Qualora si tratta di misurare l' altezza verticale di una torre, di un edificio, ed anche di una collina alla quale sia permesso di avvicinarsi per una regolare distanza, si può adoprare il seguente metodo, senza tener conto della refrazione, e della differenza degli orizonti.

F.40 Sia AM l' altezza da calcolarsi, e dinoti $EFBC$ una pianura orizontale situata al piede di questa altezza.

Si tracci una base EF di una lunghezza proporzionata alla distanza EA, che ad occhio può valutarsi ad un dipresso.

Situando il cerchio ripetitore nelle stazioni E, ed F, si misurino gli angoli AEF, AFE, formati dalla direzione EF, e dalle visuali EA, FA. Con questi dati si calcoli la lunghezza EA; e poi si misuri l' angolo al zenit ZEA. Nel triangolo DEA rettangolo in D, risulta

$$DE = EA \text{ cos. } DEA.$$

Il valore di DE esprime l' altezza che si domanda.

Se fosse possibile di tracciare la base BC in maniera che i punti B, A, C fossero in uno stesso piano verticale, in tal caso si misurino solamente due distanze zenitali $Z'BA$, $Z''CA$,

ed il triangolo ABC resterebbe determinato. Si calcoli il lato BA, e poi si faccia

$$BD' = BA \cos.\ D'BA.$$

Sarebbe BD' l' altezza richiesta.

Si avverta, che alle altezze calcolate ED, BD' bisogna aggiungere l' altezza dell' istromento, col quale si è osservata la distanza zenitale.

Metodo barometrico.

93. Tra' metodi finora escogitati, il più esatto è il barometrico, e non si mancherà di averne de' risultati esattissimi, se con precisione si segua la norma, che saremo per indicare.

Consiste questo metodo nel paragonare per mezzo di una formola analitica, le due altezze baromotriche del mercurio, che contemporaneamente han luogo in due siti diversi, cioè alle falde di un monte, ed alla sua sommità; tenendo conto in questo rapporto anche delle rispettive temperature de' luoghi. Quando l' esperienze siano ben fatte, la predetta formola farà conoscere la distanza verticale che separa i due luoghi. Quali siano intanto le macchine da sottoporsi all' esperienza, e come convenga adoprarle, si rileva da quanto siegue (1).

1.° Due osservatori si debbono munire di eccellenti stromenti, scrupolosamente paragonati

(1) Questi dettagli son ricavati da una dotta memoria del sig. *Ramond*. In essa apparisce doversi far uso di due barometri uniformi; ma in caso di necessità si può adoprare lo stesso, prima nella stazione inferiore, e poi nella superiore: ma il risultato non sarà esattissimo, dacchè le osservazioni non furono contemporanee.

tra loro, affin di vedere se in parità di circostanze diano risultati identici, o almeno di una differenza costante. Questi stromenti consistono in due *barometri*, ognuno de' quali sia guarnito di un *termometro centigrado*, incassato nella medesima montatura: in tal guisa il mercurio del barometro, e quello del termometro proveranno lo stesso grado di temperatura, non essendo l' uno più esposto dell' altro, all' azione dell' aria.

2.° Si debbono avere inoltre due altri *termometri centigradi*, ma senza montatura, talchè la graduazione sia segnata sul tubo medesimo. Questi termometri destinati ad indicare la vera temperatura dell' atmosfera, si debbono situare alcune ore prima delle osservazioni nelle rispettive stazioni inferiore e superiore; facendoli pendere dall' estremità di due bastoni, conficcati obliquamente sul terreno, in guisa che l' ombra de' bastoni preservando i tubi da' raggi del sole, gli espongano alla libera circolazione dell' aria ambiente. Questi ultimi si chiamano *liberi*, perchè privi d' incastro.

3.° Ciascuno degli osservatori portando con se uno de' predetti barometri, dovrà recarsi nella rispettiva stazione, per ivi eseguire le osservazioni, le quali debbono essere contemporanee, ed eseguite verso l' ora del mezzogiorno, in una giornata non tempestosa. L' esperienza fa conoscere che verso il mezzogiorno l' equilibrio si stabilisca nell' atmosfera, potendosi ciò rilevare dal barometro e dal termometro, che rimangono per molto tempo stazionarj.

4.° Nel valutare le altezze del barometro, e del termometro, bisogna osservare lo stesso nto della superficie del mercurio, per esem-

pio, il punto più alto della convessità. Oltre a ciò i barometri si debbono situare al ricovero del calore, ed in una maniera stabile, affinchè il mercurio non abbia alcuna agitazione. Bisogna badare ancora, che nel trasportar la macchina l' aria non s' insinui nella parte vuota del tubo, traversando la colonna mercuriale; locchè si evita, chiudendo ermeticamente l' apertura per dove comunica l'aria, in tutto il tempo del trasporto.

5.° I barometri possono essere a cisterna, o a tubo ricurvo; ma quest' ultima forma è sempre preferibile per le osservazioni, perchè si hanno due superficie del mercurio ne' due rami del sifone, e la distanza verticale tra queste due superficie dinota la vera altezza barometrica. A tal riguardo il sig. *Deluc* ha esclusivamente adottata questa ultima forma, anche per la ragione che con essa si evita l' effetto capillare de' tubi. Bisognerebbe ancora che la scala graduata de' barometri fosse mobile, ad oggetto di situare la prima linea della graduazione segnata col zero, a livello della superficie più bassa del mercurio, e poi situare l' indice del nonio a livello della superficie superiore.

6.° La graduazione de' quattro termometri debb' essere centigrada, quale si è supposta nella formola analitica, che quì presso daremo; e non essendo tale la graduazione, vi si dovrà ridurre con una semplice proporzione.

L' altezza poi de' barometri può esprimersi in *linee*, o in *millimetri*; potendosi adoperare per uso della formola, qualunque divisione, purchè sia uniforme ne' due barometri.

7.° Eseguite le osservazioni a norma di questi precetti, si avranno sei quantità numeriche, cioè t, T, h per la stazione inferiore, e t', T', h',

per la superiore, le quali esprimono i seguenti valori, e si debbono registrare nella seguente maniera.

Termometri liberi.

t; *t'* sono i numeri astratti, esprimenti i gradi della vera temperatura dell' aria nella stazione inferiore, e superiore. Si debbono sostituir nella formola come positivi, se questi gradi siano al di sopra del zero; negativi, se siano al di sotto.

Termometri annessi a' barometri.

T, *T'* sono i numeri esprimenti non la temperatura dell' aria ambiente, ma quella de' mercurj contenuti ne' tubi barometrici, nelle rispettive stazioni inferiore e superiore.

Si dovrà seguire per questi numeri la regola de' segni, indicata per i termometri liberi.

Barometri.

h, *h'* sono i numeri delle *linee*, o *millimetri* contenuti nelle colonne barometriche della stazione inferiore, e superiore. Ma siccome la colonna mercuriale della stazione superiore si è contratta rispetto all' altra per due ragioni, cioè per la diminuita pressione dell' aria, e per la diminuita temperatura; così dovrà prima aumentarsi di quanto ha perduto per questa ultima circostanza, e poi sostituirsi nella formola.

È noto dall' esperienza, che per ogni grado onde si abbassa la temparatura, il mercurio si contragga di $\frac{1}{5412}$ del suo volume. Essendo la

diminuzione di temperatura dinotata da $T-T'$, quando si rapporta a' tubi barometrici, si dovrà aumentare il valore di h' di una quantità uguale ad $h'.\frac{T-T'}{54.2}$. Sicchè l'altezza da sostituirsi nella formola non dovrà essere h', ma sibbene

$$h'\left\{1+\frac{T-T'}{54.2}\right\}.$$

Per rendere più semplice l'espressione della formola, seguiteremo ad indicare con h' l'altezza barometrica superiore, considerandola già corretta dell'effetto della temperatura, e tale ancora la considereremo nella dimostrazione della formola.

Premesse le cose precedenti, si dinoti con z il numero de' metri, contenuti nella distanza verticale, che separa le falde di un monte dal suo vertice; dovrà essere

$$z=18393^{metri}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\log h-\log h'\right).$$

Daremo prima un esempio, per mostrare come si applichi questa formola con i logaritmi, e poi ne daremo la dimostrazione.

Esempio.

94. I sig. *Ramond*, e *Dangos* volendo ritrovare l'altezza del picco di Bigorre al di sopra di Tarbes, fra le montagne de' Pirenei, ottennero dalle osservazioni i seguenti risultati.

Termometri liberi.

$t = +19{,}125$ } *centigradi*
$t' = +4{,}000$

$2(t + t') = 46{,}25.$

Termometri annessi a' barometri.

$T = +18{,}625$ } *centigradi.*
$T' = +9{,}750$

$T - T' = 8{,}875.$

Barometri.

$h = 735{,}581$ } *millimetri.*
$h' = 537{,}203$

$\log h = \log 735{,}581 \ldots\ldots\ 2{,}8666305$

$\log h' = \log 537{,}203 = 2{,}7301384$

$\log 5412 + T - T' = \log 5420{,}875 = 3{,}7340694$

$\text{Compl.log.}\,5412\,(\text{log.costante}) = 6{,}2666422$

log. dell' altezza h' corretta $= 2{,}7308500 \quad 2{,}7308500$

$\log h - \log h' \ldots\ldots\ldots = 0{,}1357805$

Logaritmi de' fattori della formola.

$\text{Log}(\log h - \log h') = \log 0{,}1357805 \ .\ .\ 9{,}1328374$

$\log \frac{1000 + 2(t + t')}{1000} = \frac{1046{,}25}{1000} = 1{,}0462 \ .\ .\ 0{,}0196355$

log.coefficiente 18393 (log.costante) . $4{,}2646526$ =

$\log z \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3{,}4171255$

$\log 2612{,}916.$

Dunque l' altezza z fu ritrovata di metri 2612,916, mentre la livellazione eseguita con una precisione tutta particolare l' avea fatta risultare di metri 2613,137, maggiore della prima di $\frac{221}{1000}$ di metro.

Dimostrazione della formola.

Questa dimostrazione è fondata sopra i seguenti principj.

95. I. *La pressione, ch' esercita una colonna atmosferica su' di una data superficie, in forza della gravità, equivale all' effetto della forza elastica dell' aria.* Infatti la colonna barometrica rimane alla medesima altezza, o che la cisterna rimanga aperta, o che sia chiusa.

II. *A temperatura eguale, la forza elastica dell' aria è proporzionale alla sua densità: la densità poi è proporzionale al peso da cui l' aria è gravata.* Considerando dunque l' atmosfera come formata da infinito numero di strati sottilissimi, debbono questi andar mancando di densità, a misura che si discostano dalla terra, perchè meno premuti dagli strati superiori; ed in ciascuno di essi dovrà provarsi una *pressione* diversa, ma proporzionata alla *densità* dello strato. Chiamando p, e D queste due ultime quantità, relativamente ad un dato punto dell' atmosfera, ed alla temperatura zero del termometro centigrado, sarà sempre

$$p = aD$$

Ove a dinota un coefficiente costante, da ricavarsi dall' esperienza.

III. *A pressione eguale, la forza elastica dell' aria si aumenta di* $\frac{1}{250}$ *del suo valore, per ogni grado del termometro centigrado.* Dunque designando con x il numero de' gradi, che segna il termometro centigrado in quello stesso punto dell' atmosfera, che si è considerato pocanzi, dovrà essere

$$p = a\,D(1 + 0{,}004.\,x)$$

In tal modo la pressione, o la forza elastica dell' aria, viene espressa in funzione della densità, e della sua temperatura. La x poi è positiva al di sopra del zero, e negativa al di sotto.

IV. *È nota la legge, onde si diminuisce la densità* D *dell' aria, rispetto alle varie distanze dalla superficie terrestre: ma non è così per la temperatura* x, *che solo sappiamo diminuirsi al crescere di quelle distanze.* Vedremo tra poco, come si regolano i matematici in riguardo alla temperatura.

F.41 Premessi questi principj, sia M un punto della superficie terrestre AB, MR la sua linea verticale prolungata sino all' estremo R dell' atmosfera, ed N un punto della verticale discosto dal primo per la distanza MN. Pongasi $MN = z$, da valutarsi da M verso N; P, p dinotino le pressioni ch' esercita l'atmosfera ne' rispettivi luoghi M, N, ed h, h' le altezze delle colonne barometriche, cagionate da quelle pressioni, e risultanti dall' esperienze.

Atteso l'equilibrio dell'aria, ci è lecito d'imaginare che la colonna barometrica del luogo N, si equilibri con una colonna atmosferica, avente per altezza NR. Se dinotiamo con p la pressione, ch' esercita questa colonna atmosferica, con D

la densità dell' aria nel luogo N, con x la di lei temperatura, sarà per il III princ.

$$p = a\,D(1+0{,}004.\,x) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Un elemento dp di questa pressione si può attribuire a una parte infinitesima della predetta colonna atmosferica, e propriamente ad un cilindretto, che avesse l' unità di superficie per base, dz per altezza, e la di cui massa Ddz fosse animata dalla gravità g', relativa al punto N.

Sarà dunque

$$dp = -g'\,D\,dz \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Le quantità p, D, x, g' son tutte variabili, e dipendenti dal valore di z; si è adoperato poi il segno negativo nell' equaz. (2), perchè al crescer di z, la p diminuisce.

Si divida la seconda per la prima equazione, e sarà

$$\frac{dp}{p} = \frac{-g'\,dz}{a(1+0{,}004.x)} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Per integrare questa equazione, bisogna che le variabili x, g' si esprimano in funzione di z, da cui dipendono. Per ciò che riguarda g', è noto che la forza di gravità segua la ragione inversa de' quadrati delle distanze dal centro della terra. Dunque chiamando r la distanza del punto M dal cèntro della terra, g la gravità che ha luogo presso la superficie terrestre, risulterà

$$g' = \frac{gr^2}{(z+r)^2}$$

Riguardo poi ad x, siccome non è nota la legge onde diminuisce la temperatura all' aumentarsi

di z (princip. IV), così la supporremo costante per tutto l'intervallo MN; dandole però un valor medio, qual sarebbe la semisomma delle temperature osservate ne' punti estremi M, ed N. Chiamando t, t' queste temperature osservate, dovrà farsi $x = \frac{t+t'}{2}$.

Sostituiti questi valori di g', e di x nell'equazione (3), e fatta l'integrazione, si ritrova

$$\log p = \frac{Kgr^2}{a\left\{1+\frac{2(t+t')}{1000}\right\}} \cdot \frac{1}{r+z} + C.$$

Il logaritmo di p è preso nelle tavole ordinarie, il di cui modulo 0,434295 si è dinotato con K.

Per determinare la costante C, riportiamoci al punto M della superficie terrestre, ove p diviene P, e $z=0$. In tale ipotesi risulta

$$\log P = \frac{Kgr}{a\left\{1+\frac{2(t+t')}{1000}\right\}} + C.$$

Da questa equazione toltane la precedente, si avrà

$$\log \frac{P}{p} = \frac{Kgr}{a\left\{1+\frac{2(t+t')}{1000}\right\}} \cdot \frac{z}{r+z} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Per rendere questa equazione idonea alla determinazione di z, si sostituiscano alle pressioni P, p le colonne barometriche, che le sono equivalenti, e che hanno per altezze h, h', e per base l'unità di superficie. Dinotando con m la densità del mercurio, e con g, g' le intensità della gravità, relative alle due stazioni M, ed N, sarà

$P = mgh \quad , \quad p = mg'h' = \frac{mgh'r^2}{(r+z)^2}$

Introdotti qnesti valori di P, p nell' equazione (4), è facile il darle la seguente forma

$$z = \frac{a}{Kg}\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\log\frac{h}{h'} + 2\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right)\left(1+\frac{z}{r}\right) \ldots (5)$$

Il coefficiente $\frac{a}{Kg}$ si determina, con sostituire in questa ultima equazione in vece di z l' altezza di un monte, ritrovata esattamente con altro metodo; ed invece di h, h', t, t' le altezze del barometro, e le temperature osservate alle falde, ed al vertice di quel monte; e con dare ad r il valore del raggio medio della terra, cioè con fare $r = 6366198$ metri. In tal modo l' incognita dell' equaz. (5) sarebbe $\frac{a}{Kg}$. Dopo un gran numero di osservazioni, il sig. *Ramond* ha trovato dover essere $\frac{a}{Kg} = 18336$ metri, alla latitudine di 45.°

Cognito questo coefficiente, ecco come si adopra in pratica la formola precedente: si trascura da principio il fratto $\frac{z}{r}$, il quale è sempre piccolissimo, e si calcola il valore di z; questo primo valore si sostituisce nel secondo membro dell' equaz. (5), e si calcola un secondo valore di z più esatto del primo, il quale non mancherà di essere di una sufficiente esattezza.

Questo metodo si adopra per le grandi altezze, come sarebbe quella del Cimboraso, o del Monte bianco; ma ne' calcoli ordinarj si può

sempre trascurare il fratto $\frac{z}{r}$ senza tema di errore. In tal caso però si cambia il valore del coefficiente $\frac{a}{Kg}$, essendosi calcolato dal sig. *Ramond*, che debba essere alla latitudine di 45.°

$$\frac{a}{Kg} = 18393 \text{ metri.}$$

Dunque l'equazione (5) diviene con tali modificazioni

$$z = 18393^{\,met.} \left\{ 1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right\} (\log h - \log h') \ldots (6)$$

Siccome il coefficiente $\frac{a}{Kg}$ è una funzione della gravità g, che varia nelle diverse latitudini; così volendo seguire la massima esattezza nell'adoprare l'equazioni (5) (6) in una latitudine L diversa da quella di 45°; converrà moltiplicare i rispettivi valori di $\frac{a}{Kg}$ per $\left\{ 1 + 0{,}002837 . \cos. 2L \right\}$ tal' essendo la legge onde varia il valore della gravità, relativamente alla latitudine di 45.° *Veggasi il I Tom. della meccanica del sig. Poisson n.° 194.*

96. Se con una delle due formole precedenti si voglia conoscere quanto si elevi dalla superficie del mare, un luogo situato nel mezzo del continente; si dovrebbe fare $t = 12°$ centesimali, $h = 0{,}7629$ millimetri, quali si sono osservati a livello dell'oceano. Riguardo poi a t', h', si dovrebbero adoprare le altezze medie del termometro, e del barometro, osservate nella stazione di cui si cerca l'altezza sul mare, almeno per l'intervallo di un anno. E finalmente dovrebbe farsi $T = t$, $T' = t'$.

PARTE TERZA.

PROBLEMI DI GEODESIA.



Considerazioni su la misura delle basi, e degli angoli.

97. Nella prima Parte di questo trattato non abbiamo considerato quegli ostacoli, che la natura del terreno suole spesso presentare nella misura delle *basi*; ed abbiamo anche supposto potersi sempre situare l' istromento destinato alla misura degli angoli, nel *centro de' signali* osservati dalle altre stazioni. Ma il vero è, che le distanze da misurarsi sono qualche volta interrotte da colline, che impediscono di proseguire l' allineamento di una base; ed altre volte sono traversate da fiumi, laghi, e terreni paludosi, che sebbene non tolgano il vedere la direzione primitiva, impediscono pur non di meno il proseguo della misura. Oltre a ciò, la qualità de' segnali non sempre permette all' osservatore il situarsi nel punto preciso, che si è osservato dalle altre stazioni.

Per ovviar dunque a tali inconvenienti, daremo tre problemi; col primo faremo vedere, come possa l' operatore rimettersi nel primo allineamento, ad onta degli ostacoli che gl' impedivano di vederne la direzione; e come si possano valutare gli spazj occupati da questi ostacoli: col secondo si dà la maniera di misurare l' ampiezza di un fiume, di un lago, o di un terreno paludoso: col terzo poi s' insegna a ridurre gli angoli nel centro della stazione.

Probl. I.

Misurare una distanza interrotta da una collina.

98. Soluz. Supposngasi che nel giungere al F. 42 punto B della base AB, s' incontri un' elevazione di terreno; e che si voglia ad onta di questo ostacolo, prolungare la direzione AB, e valutare l' intervallo non misurato.

Si scelga sulla superficie laterale del terreno, un punto C talmente situato che si potrebbe da esso osservare il prolungamento di AB, guardando a traverso de' fianchi della collina.

Si prendano in seguito sulla distanza AB misurata, due punti visibili dalla stazione C, e disposti in maniera da formare un triangolo ACB equilatero il più ch' è possibile. Conosciuto il lato AB di questo triangolo, se ne misurino gli angoli, affine di determinarlo pienamente. Poi si farà situare un picchetto nel punto m, in modo che la direzione Cm prolungata passerebbe su i fianchi della collina, ed anderebbe ad incontrare il prolungamento di AB. Con la misura dell' angolo ACm si viene a determinare il secondo triangolo ACD, in cui si conoscono gli angoli DAC, ACD, ed il lato AC, che appartiene ancora al primo triangolo. In tal modo si può calcolare il valore di AD, e di CD.

Allineata la direzione CmD (22), e preso in essa una distanza uguale al valore di CD, si perverrà al punto D situato nel prolungamento della base, e discosto da A per una distanza conosciuta.

Se dal punto C non si potesse vedere che il solo punto B, si avrebbe ricorso al quadrila-

tero *AECB*, con fissare nel punto *E* un' altra stazione da cui fossero visibili i punti *A*, e *C*. Misurati i tre angoli *BAE*, *AEC*, *ECB*, e misurato il lato *AE* al dippiù del lato *AB* già cognito, si avrebbero i cinque dati determinanti il detto quadrilatero. Co' precetti di trigonometria si calcoli il valore di *BC*, e si rilevi l' angolo *BCD*: si avrà in tal modo il triangolo *BCD*, che conduce al punto *D*, come nel caso precedente.

PROBL. II.

Determinare la larghezza di un fiume, o la distanza di due punti situati nel contorno di un lago.

99. SOLUZ. Sul terreno che fiancheggia il fiume, e parallelamente alla corrente delle acque, si tracci una base *AB*. Nell' estremo *A* si situi F.43 un grafometro in modo, che l' alidada fissa sia nella direzione di *AB*, e l' alidada mobile corrisponda al grado 90 della divisione del lembo, cioè che sia perpendicolare alla prima. Si osservi il punto *C* della sponda opposta del fiume, al quale è diretto il raggio visuale *AC*. Poi si misuri la distanza *AD*, e si osservi l' angolo *ABC*, che io dinoto con φ. Sarebbe la larghezza *CD* del fiume dinotata da $\left\{ AB.\ \text{tang.}\ \varphi - AD \right\}$.

Una simile operazione dovrebbe farsi se i due punti *C*, e *D* appartenessero al contorno di un lago, o di un terreno paludoso, e fossero nel tempo stesso situati nella direzione di una base da misurarsi.

Probl. III.

Ridurre un angolo al centro della stazione.

F.44 100. Soluz. Dinoti BCA un triangolo di primo, o second' ordine; e sia C il centro di un segnale osservato dalle stazioni B, ed A.

Supponiamo che non avendosi potuto situar l'istromento nel punto C, siasi situato nel punto O, da cui si è osservato l' angolo BOA, da doversi poi correggere, e *ridurre* al valore del vero angolo BCA.

Per eseguire tal riduzione, bisogna conoscere quattro quantità, cioè le due distanze CA, CB che serbano gli oggetti A, e B dal centro C della stazione: quali distanze non potendosi avere direttamente, si riguardano come rispettivamente uguali alle altre due OA, OB risultanti dalla risoluzione del triangolo BOA determinato in tutte le sue parti. La distanza CA *chiamasi distanza dell' oggetto a destra*, e si dinota con D; l' altra poi CB *chiamasi distanza dell' oggetto a sinistra*, e si dinota con D'. Le altre due quantità da conoscersi, sono la distanza OC che serba il centro dell' istromento dal centro C del segnale; qual distanza si misura facilmente, e suol dinotarsi con r: e l' angolo BOC compreso tra il centro del segnale, e l' oggetto a sinistra; quale angolo conosciuto col nome di *angolo di direzione*, suol dinotarsi con y.

Dunque i quattro elementi della correzione, sono

$$CA=D,\ CB=D',\ OC=r,\ BOC=y.$$

Ciò premesso, si dinoti con O l'angolo noto BOA, e con C l' angolo ignoto BCA: sarà l' angolo

$COA = O + y$, e si avranno le seguenti equazioni tra gli angoli interni ed esterni de' due triangoli AIO, bIC, cioè sarà

$$AIB = O + IAO$$
$$AIB = C + CBO$$

Eguagliando questi due valori, si avrà

$$C - O = IAO - CBO \quad \ldots\ldots (1)$$

Ma per i due triangoli CAO, e CBO dev' essere

$$\text{sen.}\, IAO = \frac{r.\,\text{sen.}\,(O+y)}{D} \quad \ldots (2)$$

$$\text{sen.}\, CBO = \frac{r.\,\text{sen.}\,y}{D'} \quad \ldots\ldots (3)$$

E la piccolezza degli angoli CAO, CBO permettendo di sostituire gli archi a' seni, si avrà con sostituire nell' equazione (1) i valori degli angoli IAO, CBO ricavati dall' equazioni (2) (3)

$$C - O = \frac{r.\,\text{sen.}\,(O+y)}{D} - \frac{r.\,\text{sen.}\,y}{D'} \quad \ldots (4)$$

Dinotando con ϵ la correzione $C-O$, e volendola esprimere in secondi, converrà dividere per sen. $1''$ (1) i due termini del secondo membro

(1) Se una linea trigonometrica, per es. il seno di 30°, si divida pel seno di un secondo, il quoto $\frac{\text{sen. } 30^\circ}{\text{sen. } 1''}$ esprimerà il numero de' minuti secondi, che si contengono in un arco della stessa lunghezza del seno di 30°; potendosi senza errore sensibile considerare l'arco di un secondo come perfettamente uguale al suo seno. Con tal ripiego usatissimo in Astronomia, ed in Geodesia, si riducono le linee trigonometriche in archi di cerchio, e viceversa: avvertendo che il log-mo di sen. $1''$ sia 4. 19612.

dell' equazione (4) : sicchè dovrà essere

$$\epsilon = \frac{r.\ \text{sen.}\ (O+y)}{D\ \text{sen.}\ 1''} - \frac{r.\ \text{sen.}\ y}{D'\ \text{sen.}\ 1''} \ \ldots \ldots \ (5)$$

I segni corrispondenti a' seni di $O+y$, e dell' arco y, decideranno de' segni del primo, e secondo termine della correzione. Così supponendo $O+y$ maggiore di 180°, il primo termine da positivo diverrebbe negativo : viceversa, se si supponga y maggiore di 180°, il secondo termine da negativo diverrebbe positivo : ma in tutt' i casi la correzione ϵ si dee aggiungere all' angolo osservato O. Un esempio farà meglio conoscere l' applicazione di questi principj.

Esempio.

Sia l' angolo osservato $O = 48.° \ 25'. \ 30''$

l' angolo di direzione $y = 183.° \ 00'. \ 06''$

Loro somma $O+y = 231.° \ 25'. \ 36''$

La distanza del centro $r = 5^{metri}, \ 257$

La distanza dell' oggetto a destra $D = 17528^{met.}$

Quella dell' oggetto a sinistra $D' = 20345^{met.}$

Si ponga l' equazione (5) sotto la seguente forma

$$\epsilon = \frac{r}{\text{sen.}\ 1''} \left\{ \frac{\text{sen.}\ (O+y)}{D} - \frac{\text{sen.}\ y}{D'} \right\}$$

1° *termine della correzione.*

Com. log. sen. 1″ . . .	5,80388	(log. costante)
log. r	0,51282	
	6,51670	
log. sen. $(O+y)$.	9,89310	
Com. log. D.	5,75627	
	1,96607 = log. 92″, 483.	

Dunque il primo termine della correzione è di 1′. 32″, 483, ed è negativo, per esser tale il sen $(O+y)$.

2° *termine della correzione.*

log. $\frac{r}{\text{sen. } 1''}$ . . .	6,51670
log. sen. y . . .	8,71904
Com. log. D'	5,69154
	0,72728 = log. 5″, 337

Il secondo termine è positivo, e corrisponde a 5″, 337

Primo termine	— 1′.	32″,	483
Secondo termine	+ 0′.	05″,	337
Riduzione	— 1′.	27″,	146
Angolo osservato	48°.25′.	30″	
Angolo ridotto al centro .	48°.24′.	02″,	854

Per non equivocare su la misura dell'*angolo y di direzione*, è da badarsi che questo angolo sarà sempre minore di 180°, finchè il pun-

to C stia a sinistra della direzione OB, prolungata se bisogna; diventa poi maggiore di 180°, ogni qual volta il punto C corrispondesse a destra di tal direzione. Val quanto dire, il valore dell' angolo BOC dee valutarsi a partire dal punto B, e procedendo sempre verso la sinistra della direzione BO, può aumentarsi da zero sino a 360°.

Probl. IV.

Configurare con la plancetta il contorno di un terreno.

101. Soluz. Quando si eseguiscono con la plancetta le operazioni di dettaglio, si ottengono i contorni de' poligoni iscritti, o circoscritti a' diversi oggetti del terreno; ma in seguito si debbono configurare i loro limiti naturali, che sono per lo più delle curve complicate. Nalla prima parte (36) si disse che i punti principali di questi contorni flessuosi, si ricavavano dalla misura effettiva delle coordinate rettangolari, dirette dalla squadra di agrimensore: ma questo metodo per lo più lungo e malagevole, è qualche volta ineseguibile per gli accidenti che presenta il terreno. Allora è da adoprarsi il metodo della *intersezione delle visuali*, con far servire di base ciascun lato del poligono iscritto, o circoscritto. Così per
F.45 esempio, volendosi figurare il limite naturale AB corrispondente al lato ab del poligono, converrà situare la plancetta al disopra del punto del terreno rappresentato dal punto a del disegno, e disposto il lato ab del poligono nella direzione della linea che le corrisponde sul terreno, si farà muovere l' alidada d' intorno al punto a, dirig-

gendola successivamente a' punti A, C, D, E ec.: e replicando lo stesso nella stazione disegnata dal punto b, si avranno i punti principali del contorno $ACDEB$, che si dovranno poi unire per mezzo di una curva tracciata ad occhio, e così aver presente l'oggetto da figurarsi.

Probl. V.

Valutare una distanza inaccessibile.

100. Soluz. Siano A, e B due punti di un terreno disuguale, e sia l'intervallo AB traversato da un borrone, o da una valle così profonda, da non potersi misurare; o potendosi misurare, non sia permesso l'avvicinarvisi, come avverrebbe, se fosse un posto nemico. F.46

Per valutare questo intervallo AB, bisogna ricorrere a' mezzi trigonometrici, distinguendo tre casi, secondo le diverse circostanze che si presentano sul terreno.

Caso 1.° Supponiamo che gli estremi A e B della distanza AB siano accessibili, e che il terreno laterale permetta il misurare le due distanze AC, BC, insieme con l'angolo compreso ACB. Chiamando a, b queste distanze, e C l'angolo compreso, sarebbe

$$AB = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,ab\,\mathrm{Cos}\,C)}.$$

Avvertendo, che se le distanze AC, CB siano oblique, si debbano ridurre all'orizzonte, insieme con l'angolo osservato, e poi sostituire questi valori ridotti invece di a, b, C nella formola precedente.

Caso 2.° Supponiamo in secondo luogo non esser possibile l'avvicinarsi a' punti A e B; al- F.47

lora converrà misurare sul terreno che fiancheggia la distanza AB, una base CD pressochè uguale ad AB, e disposta in maniera da potersi vedere da' suoi estremi ciascuno de' punti A e B. Ciò fatto, si misurino nell' estremo C i due angoli ACD, BCD, e poi nell' altro estremo D si misurino gli altri due angoli BDC, ADC.

Nel triangolo ACD conoscendosi due angoli, e il lato CD, si determini AC: similmente nell' altro triangolo BDC si determini CB. Finalmente nel triangolo ACB conoscendosi due lati AC, BC, e l' angolo compreso ACB come differenza degli angoli osservati ACD, BCD, si potrà calcolare A B o con la trigonometria, o con la formola esibita nel 1.° Caso.

Caso 3.° Supponiamo in ultimo, esser tale la irregolarità del terreno da non potersi misu-
F.48 rare altra distanza, che la sola CD la quale sia talmente disposta rispetto a' quattro vertici del quadrilatero $ACDB$, da potersi vedere dall' estremo C i soli punti A, e D; siccome dall' estremo D i soli punti B, e C. In tal caso converrà scegliere sul terreno un altro punto, che sia nel mezzo del quadrilatero $ACDB$, o al di fuori di esso, come apparisce nella figura, dal quale però sieno visibili i quattro vertici A, B, C, D. Supposto essere O questo punto così condizionato, si misurino con esattezza sei angoli, cioè AOB, BOD, DOC formati dalle diagonali, e gli altri tre OCA, OCD, CDB.

Il primo triangolo OCD essendo determinato, farà conoscere i lati OD, ed OC.

Nel secondo triangolo ODB conoscendosi il lato OD, l'angolo BOD, e l'angolo $ODB = CDB - CDO$, si può calcolare OB.

Nel terzo triangolo AOC conoscendosi gli angoli AOC, OCA e 'l lato OC, si può calcolare OA.

Finalmente nel quarto triangolo AOB conoscendosi i due lati OA, OB, e l'angolo compreso, si potrà calcolare la distanza AB che si cercava conoscere.

Probl. VI.

Da un dato punto del terreno condurre una linea geodesica parallela ad una distanza inaccessibile.

103. Soluz. Sia BA una direzione inaccessibile, alla quale dee condursi sul terreno una parallela, che passi pel punto C dato di posizione. Si tracci nel luogo più adattato del terreno una base CD, e ne' suoi estremi C, e D si osservino i punti A, e B, affine di valutare gli angoli che queste visuali formano con la distanza CD; e poter così determinare il triangolo ACB, secondo la norma indicata nel *Caso* 2.° del problema precedente. Determinato il triangolo ACB, si calcoli il valore dell'angolo ABC, dopo di che si dovrà situare nel punto C un grafometro in maniera, che abbia l'alidada fissa rivolta al punto B, e l'alidada mobile inclinata a destra della prima, per un'arco uguale all'angolo noto ABC. In seguito si farà piantare un picchetto p nella direzione del raggio visuale diretto dall'alidada mobile, e sarebbe Cp la direzione della parallela richiesta. F.49

Vi è ancora un altro metodo, che potendosi adoprare, riesce molto facile, venendosi a risparmiare la misura della base CD, ed il calcolo trigonometrico.

Nel punto C si misuri l'angolo ACB: indi si ricerchi un altro punto C' del terreno, da cui si possa rilevare la distanza AB sotto un angolo $AC'B$ uguale al primo ACB. Ritrovata, se sia possibile, una tale posizione, si è sicuro che i quattro punti A, C, C', B siano allocati in una stessa circonferenza di cerchio, per cui dovrà essere l'angolo ABC uguale all'altro $AC'C$. Misurato dunque l'angolo $AC'C$, si verrà a conoscere il suo eguale BCp, ed il problema rientra nel caso precedente.

Volendosi poi tracciare sul terreno una linea, che passando pel punto C, avesse una direzione perpendicolare alla linea inaccessibile AB; si dovrebbero fare le medesime operazioni per determinare l'angolo ABC, e poi si dovrebbe traguardare a sinistra della visuale CB, con discostarsene per un angolo che fosse complemento di ABC.

Probl. VII.

Calcolare l' altezza di una torre per mezzo di un grafometro, o dell' ombra solare.

F. 50 104. Soluz. Se AC dinoti una torre situata nel mezzo di una pianura, e di essa si voglia conoscere l'altezza, converrà operare a questo modo. A partire dal punto A della base si misuri una distanza AB, e situato nell' estremo B un grafometro, o altro strumento graduato, si osservi l' angolo mnC formato dal raggio orizzontale nm, e dalla visuale nC diretta alla estremità della torre. Chiamando D la distanza misurata, e ridotta all'orizonte; φ l'angolo osservato, ed A l'altezza ignota, sarebbe.

$$A = D \text{ tang. } \phi$$

A questo valore di A aggiungendovi l'altezza dello strumento, si verrà a conoscere l'altezza della torre, relativamente al piano su di cui poggia l'osservatore.

Se si mancasse di una macchina graduata, si potrebbe pur nondimeno conoscere l'altezza della torre, mediante l'ombra solare ch'essa projetta sul piano adiacente. Sopra una parte la più eguale del terreno, e meglio ancora sopra di una tavoletta orizontale si dovrebbe situare un bastone con posizione verticale. Quindi in un medesimo istante si dovrebbero marcare i punti D, d ne' quali terminano le ombre rispettive della torre, e del bastone: misurate le distanze AD, ad, e la lunghezza del bastone, si dovrebbe istituire questa proporzione.

$$ad : ac = AD : AC.$$

Il quarto proporzionale sarebbe l' altezza richiesta.

Maniera di dividere le superficie in data ragione.

105. La parola *Goedesia* presa nel vero senso, significa *divisione de' terreni* : ma siccome l'assegnare i limiti di una divisione, presuppone la misura effettiva di alcune parti della superficie da dividersi, e qualche volta ancora la conoscenza della di lei estensione; così n'è derivato che la parola *Goedesia* si adopri ordinariamente per indicare la *misura de' terreni*.

Dovendo dunque trattare della maniera di dividere una figura in data ragione; indicheremo

con un problema come si debbano valutare le superficie de' poligoni rettilinei, a' quali unicamente ci limitiamo in questa istituzione elementare; e poi con altri problemi faremo vedere, come si possa effettuire una determinata divisione. Proponendoci di non esaurire il soggetto con multiplici esempj, ma presentandone due solamente, che potranno servir di norma per i casi particolari: tantoppiù che i problemi di tal natura appartengono direttamente alle matematiche pure, senza che abbian bisogno di precetti particolari.

Probl. VIII.

Calcolare la superficie di un poligono rettilineo

106. Soluz. S'intenda diviso il dato poligono in triangoli, per mezzo delle diagonali condotte dal vertice di un angolo a' vertici degli angoli opposti: il numero di questi triangoli verrà dinotato da $n-2$, qualora si dinoti con n il numero de' lati del poligono. Per valutar l' aja di un triangolo bisognandovi la conoscenza di tre parti, tra le quali vi sia un lato; si dovranno avere tre dati per uno de' triangoli componenti il poligono, e due dati per ciascun' altro; mentre la determinazione del primo triangolo somministra un dato per la determinazione del secondo, e così di seguito. Dunque i dati necessarj per valutare le aje di tutti i triangoli componenti il poligono, debbono essere $2(n-2)+1=2n-3$; comprendendovi i lati, gli angoli, e le diagonali del poligono, oppure gli angoli formati dalle stesse diagonali tra di loro, e co' lati del poligono medesimo.

La regola dunque per valutare l'aja di un poligono rettilineo si riduce:

1. A misurar sul terreno tante parti del poligono, compresovi i lati, le diagonali, e gli angoli formati da queste rette, per quante ne dinota il doppio numero de' lati del poligono, diminuito di tre unità.

2. Nel valutare con questi dati le rispettive superficie de' triangoli componenti il poligono: distinguendo tre casi più facili ad avverarsi, cioè:

Caso 1. Quando si conoscano due lati a, b, e l'angolo compreso C, chiamando S la superficie del triangolo, sarebbe

$$S=\frac{ab}{2}\,\text{Sen}\ C\ldots\ldots\ (1)$$

Caso 2. Quando si conoscano i tre lati a, b, c, chiamando s la semisomma di questi tre lati, sarebbe

$$S=\sqrt{\left\{s(s-a)(s-b)(s-c)\right\}}\ \ldots\ (2)$$

Caso 3. Quando si conoscano i tre angoli A, B, C, ed un lato a opposto all'angolo A, sarebbe

$$S=\frac{a^2\,\text{Sen.}\,B\ \text{Sen.}\,C}{2\ \text{Sen.}\,A}\ \ldots\ (3)$$

3.° Sommate insieme le superficie di questi triangoli, si otterrà la superficie del dato poligono.

Ne' problemi seguenti, che trattano della divisione delle figure, riguarderemo come cognita la loro superficie in virtù di questo problema, e la indicheremo sempre con M.[a]

PROBL. IX.

Dividere un triangolo nel numero n *di parti uguali, per mezzo di rette che partano da un punto del perimetro, o dell' aja.*

F. 51 *Caso 1.* SOLUZ. Sia EDB il triangolo proposto, ed A il punto dato sul perimetro: sia AC la prima retta di divisione, talchè ACB sarebbe la parte *ennesima* del triangolo EDB. Per conoscere il valore di BC, affin di procedere in pratica dalla stazione C verso un segnale situato in A, si dinoti con M^2 la superficie del triangolo EDB. Indi misurata la distanza AB, e rilevato l' angolo ABD, o ricavatolo dal calcolo, si ponga $AB=b$, $ABD=B$, $BC=x$.

Sarà

$$\frac{bx}{2}\,\text{sen.}\,B=\frac{M^2}{n}$$

Da questa equazione si ricava facilmente il valore della x, e quindi della distanza BC.

Ma con la geometria si ricava più facilmente questo valore, mediante una semplice proporzione, cioè facendo

$$AB:BD=\frac{BE}{n}:BC.$$

In fatti considerando essere BM la parte *ennesima* di BE, dovrebb' essere MC parallela ad AD in virtù della succennata proporzione. Quindi sarebbe il triangolo $ACM=$ triang. DMC, e finalmente $ACB=DMB=\frac{M^2}{n}$.

Conosciuta la distanza BC, e prendendone un' altra CL che le sia uguale, sarebbe AL la seconda retta di divisione. La stessa operazione si dovrebbe continuare, finchè rimanesse $DL < BC$, oppure $Ap < MB$ (intendendosi divisa la base EB in parti tutt' eguali ad MB).

Allora si comincerebbe la stessa operazione dall' altro vertice E, facendo

$$EA : ED = \frac{EB}{n} : EF.$$

Sarebbe AF un' altra retta di divisione ; e tagliata $FK = FE$, AK ne sarebbe un' altra : e così proseguendo innanzi, finchè rimanesse $KD < EF$, o $qA < EN$. Il trapezio $KDLA$ sarebbe l' ultima parte della divisione. In fatti, prolungata Kq sino all' incontro di DB, sarebbe $RL = CB$, e perciò il triangolo $RAL = ACB$ = trapezio $KDLA$.

Caso 2. Sia D il punto dato nell' aja, e supponiamo che una delle rette di divisione debba essere la BD che unisce un vertice del triangolo col punto dato. Si misuri la distanza BD, e l' angolo ABD; e si chiami b la prima, e φ il secondo. Supposto che sia ED la seconda retta di divisione, si ponga $BE = x$, e si faccia F.5.

$$\frac{bx}{2} \text{ sen. } \varphi = \frac{M^2}{n}$$

Si ritroverà in tal modo il punto E. Se fosse $AE = EB$, sarebbe il triangolo AED = triangolo EBD, ed AD la terza retta di divisione ; ma supposto essere $AE < EB$, si determini l' aja del triangolo AED, mediante la conoscenza de' lati AE, ED, e dell' angolo compreso AED,

e si dinoti per m^2. Indi si chiami y la distanza AF, per la quale passa la terza retta di divisione, ed f la distanza nota AD: come pure si dinoti con φ' l' angolo DAF che puol' osservarsi, o conoscersi con togliere dall' angolo BAC la parte nota BAD. In tal modo si avrà l'equazione

$$m^2 + \frac{fy}{2} \text{ Sen. } \varphi' = \frac{M^2}{n}$$

dalla quale si ricava il valore di y, e con un metodo sempre uniforme si passa a conoscere il valore di BG, CF, ec. Da' punti noti E, F, G, ec. tracciando de' limiti sul terreno, che procedano verso un segnale situato in D, si verrà ad ottenere la divisione richiesta.

108. Questo problema può servire in pratica, quando si vogliano far passare le divisioni di un terreno per un sito di uso comune, come sarebbe un pozzo, un magazzino di deposito, o altro simile oggetto.

P R O B L. X.

Dividere il triangolo ABC *in data ragione, per mezzo di una retta di minima lunghezza.*

F.53 109. Soluz. Sia DE la retta richiesta, su la quale s' intenda calata la perpendicolare BF. Si dinoti con x la retta DE, con α l' angolo DBF; e si esprimano con A, B, C gli angoli, e con a, b, c i lati opposti del triangolo dato.

Essendo nota la ragione degli spazj DBE, $ADEC$, sarà anche data quella del triangolo

ABC all' altro DBE, e tal ragione si dinoti con $m:n$.

Nel triangolo DBE si conosce l'espressione del lato DE, e quella degli angoli; essendo $BDE = 90^\circ - \alpha$, $BED = 90^\circ + \alpha - B$, e $DBE = B$: sarà dunque (106) il triangolo

$$DBE = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\text{Sen.}\,(90 - \alpha)\,\text{Sen.}\,(90 + \alpha - B)}{\text{Sen.}\,B}$$

Ma per la data ragione, debb' esser pure

$$DBE = \frac{n}{m} \cdot \frac{ac}{2}\,\text{Sen.}\,B$$

Pareggiando questi due valori di DBE, e ricavandone il valore della x^2, sarà

$$x^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{ac.\ \text{Sen.}^2 B}{\text{Cos.}\,\alpha.\ \text{Cos.}\,(\alpha - B)} \cdot \cdot \cdot \cdot (A)$$

Affinchè la x divenga un *minimo*, dovrà essere un *massimo* il denominatore $\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,(\alpha - B)$, cui può darsi la forma esplicita

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,(2\alpha - B) + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,B$$

Dalla quale apparisce al momento, che quel denominatore divenga un *massimo*, quando sia

$$2\alpha - B = o,\ \alpha = \frac{B}{2}$$

Sostituito questo valore nell' equaz. (A), e ricavandone il valore della x, verrà a determinarsi il triangolo DBE, che si cercava conoscere.

110. Questa elegante soluzione è dovuta al Signor *Puissant*.

AVVERTIMENTO.

Siccome è precetto generale di Topografia, il presentare le superficie in projezione orizzontale, così prima di dividere un terreno inclinato, bisognerà formarne la *projezione ortogonale*.

Il motivo che determina a tale operazione, dipende da due ragioni: 1.° che sarebbe difficile il metter di accordo le parti di un terreno, situato parte orizontalmente, e parte in posizione inclinata; 2.° perchè si è conosciuto per esperienza, non essere la coltura di un terreno in proporzione con la di lui superficie: mentre un campo situato sul pendìo di una montagna non dà lo stesso prodotto, che somministra un campo della medesima estensione e situato nella pianura. Ciò meglio si rileva in un terreno arborato, e posto su di una scoscesa, riflettendo alla posizione verticale alla quale si adattano naturalmente i tronchi degli arbori.

PROBL. XI.

Determinare la direzione della capitale di un bastione inaccessibile.

F.54 111. Soluz. Dinoti CD la capitale del bastione ACB, cioè la retta che divide l'angolo ACB per metà. Per conoscere sul terreno adjacente un punto K appartenente al prolungamento di CD, converrà prendere un punto M nella direzione della faccia CB, ed un punto N nella direzione dell' altra faccia CA del bastione. Indi misurata la distanza MN, si facciano situare in M, ed N due segnali, affin di rilevare gli angoli CMN, CNM.

Dovendo la retta CK dividere l'angolo MCN per metà, saranno i due segmenti MK, KN come i lati adjacenti, o come i seni degli angoli opposti in N, ed M. Chiamando dunque N, M questi angoli, b la distanza MN, ed x il segmento MK; sarà

$$\text{Sen. } M + \text{Sen. } N : \text{Sen. } N = b : x$$

$$. \ x = \frac{b. \text{ Sen. } N}{\text{Sen. } M + \text{Sen. } N}$$

Per adattarvi *i log-mi*, può farsi

$$x = \frac{b \text{ Sen } N}{2 \text{ Sen. } \left(\frac{M+N}{2}\right) \cos. \left(\frac{M-N}{2}\right)}$$

In tal modo si ritrova il valore della distanza MK, che dovrà prendersi su l' allineamento MN, per avere il punto K.

Se non fosse possibile il misurare la distanza MN sul terreno; si potranno purnondimeno esibire due punti su la direzione di DC, per mezzo della sola conoscenza degli angoli M, e N. Infatti, sapendosi il valore dell'angolo MCN, si dovrebbero segnare sul terreno due direzioni MR, NR tali, che ciascuno degli angoli NMR-MNR fosse la metà dell'angolo noto MCN, L'incontro di queste direzioni darebbe i punti R, R', secondocchè l' operazione si faccia al di sotto, o al di sopra della direzione MN. La ragione apparisce dal riflettere, che il quadrilatero $MCNR$ sarebbe iscrittibile in un cerchio, per avere gli angoli opposti MCN, MRN nella somma uguali a due retti.

Se finalmente non si potesse uscire dalla direzione MN, bisognerebbe in tal caso ritrovare

un punto *K* talmente situato, che l' angolo *CKN* fosse il supplemento degli angoli noti *KCN*, *KNC*.

Probl. XII.

Dato il disegno di un progetto, tracciarne sul terreno i limiti, che passino per un punto dato.

F. 55 112. Soluz. Sia *bac*. . . . il disegno adattato su la plancetta; *NS* la direzione della meridiana, destinata ad orientare il disegno; e dinoti *A* il punto dato sul terreno, per il quale dee passare il limite naturale del progetto.

Per tracciar questo limite, basta seguire un metodo inverso, rispetto a quello indicato nel Probl. I pel §. 36: in questo dal contorno naturale di un poligono s' insegnò a ricavarne un disegno; nel problema attuale si cerca dal disegno ricavarne il contorno naturale. Supposto dunque che il punto *a* rappresenti il punto *A* del terreno, bisognerà situare la plancetta in maniera, che questi due punti siano nel medesimo appiombo: ed in seguito adattando il declinatore (39) su la retta *NS*, si farà girare il piano della plancetta finchè la punta boreale dell' ago faccia con la retta *NS*, un angolo eguale alla *declinazione dell' ago calamitato*, nel senso corrispondente. Allora il disegno si trova orientato, ed in correlazione con il terreno.

Di poi si adatterà il taglio della *diottra* (34) su la retta *ab*, e mirando a traverso de' traguardi, si farà situare un picchetto *R* nella direzione della visuale. A partire dal punto *A*, e continuando sempre verso *R*, si traccerà sul terreno una distanza *AB* uguale a quella che vien

dinotata da *ab*. Lo stesso facendosi a destra; si verranno ad ottenere i due punti *B*, e *C*, e le due direzioni *AB*, ed *AC*, che rappresentano sul terreno i punti *b*, *c*, e le rette *ab*, *ac* del disegno.

Replicando successivamente la stessa operazione ne' punti *B*, *C*, ed in tutti gli altri che si ricevano in seguito; si verrà ad ottenere sul terreno un poligono simile, e similmente posto, a quello che si trova rappresentato nella figura.

Il problema XII è destinato a porre il termine a questi elementi di Geodesia. L'estenderci sopra ulteriori precetti, sarebbe lo stesso che confondere la mente de'giovani, e disgustarli di una scienza, troppo amena di sua natura. Bisogna che questi pochi precetti siano realizzati in pratica, e divengono perciò familiari. Dopo questo primo passo, si possono consultare i trattati originali, per dare alle proprie idee una proporzionata estensione.

APPENDICE.



113. Le teorie precedenti sono a portata di coloro, che conoscono la sola trigonometria rettilinea, ed i principj della sfera armillare. I due problemi che andremo ad esporre in questo *appendice* son destinati per quelli che hanno già studiato la *geografia matematica*; ad oggetto di mostrar loro come la topografia possa direttamente influire sul progresso della geografia, e su la formazione delle carte geografiche.

È noto che per la formazione di un atlante geografico si richieggano due conoscenze: cioè il sapere come si formi il reticolato de' meridiani e de' paralelli, secondo le regole della *projezione stereografica*, se trattasi di un mappamondo; e secondo le regole dello *sviluppo conico*, *o cilindrico*, se trattasi di una carta particolare, o ridotta: ed oltre a ciò è necessario il conoscere le latitudini, e longitudini de' punti principali, affin di situarli ne' rispettivi quadrilateri del reticolato già fatto.

In riguardo a questa ultima conoscenza, faremo vedere col 1. problema, come si possano ricavare le latitudini, e longitudini de' luoghi non dalle osservazioni Astronomiche, ma dalle operazioni Topografiche: e poi con un secondo problema, farem vedere come si debbano formare le carte topografiche, affinchè possano divenire gli elementi di composizione per una carta geografica, costruita secondo *la projezione di Flamsteed modificata*.

PROBL. I.

Data la latitudine, e longitudine del punto A, *cui si riferiscono la meridiana* AX, *e la perpendicolare* AY, *e supposto la terra sferica: ritrovare la latitudine, e la longitudine di un punto* B, *per mezzo delle sue distanze dalla meridiana, e dalla perpendicolare.*

114. Soluz. Siano L, L' la latitudine, e longitudine del punto A; λ, λ' quelle del punto B; e siano Bm, Bn le distanze che lo stesso punto serba dalla meridiana AX, e dalla perpendicolare AY. Egli è chiaro, che sia la distanza Bm lo sviluppo di un arco di cerchio massimo della terra, il quale passando per B insiste perpendicolarmente sopra il meridiano AX; ed è anche chiaro, che sia l'altra distanza Bn uguale all'arco Am della meridiana PX. Se dunque per B si faccia passare il meridiano BP, verrà a formarsi il triangolo sferico rettangolo PmB, in cui sono noti i due cateti Pm, Bm; e nel quale l'ipotenusa BP dinota il complemento della latitudine del punto B, mentre l'angolo mPB indica la differenza di longitudine tra' punti A, e B. F.56

Per avere queste due ultime quantità, nell' ipotesi della terra sferica, si riducano in gradi le due distanze note Bm, Bn, alla ragione di un grado per 60 miglia; e poi si dinotino per gli archi D, D'. In tal modo sarà

L'arco $Pm = 90^\circ - (L \mp D')$

L'arco $Bm = D$

L'arco $PB = 90^\circ - \lambda$

Il doppio segno esistente nel valore del primo arco si rapporta alla posizione inferiore, o superiore del punto B, rispetto alla perpendicolare AY.

Si ha della Trigonometria sferica (*G. M.* Tom. 1. §. 47.), che debba essere nel triangolo rettangolo PmB

$$\text{sen.}\,\lambda = \text{Cos.}\,D.\ \text{Sen.}\,(L \mp D') \;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Chiamando φ l' angolo BPm, sarà (*G. M.* Tom. 1. §. 46.)

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{\text{Tang.}\,D}{\text{Cos.}\,(L \mp D')} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Da cui risulta

$$\lambda' = L' \pm \varphi \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Il doppio segno si rapporta alla posizione del punto B, secondocchè sia a destra, o a sinistra della meridiana AX.

Per mezzo di queste tre equazioni si ricava facilmente la latitudine λ, e la longitudine λ', di un punto qualunque.

Esempio.

115. Un luogo B situato a destra della meridiana AX, se ne discosta per 106 miglia; e situato nella parte meridionale della perpendicolare AY, se ne allontana per 27 miglia. Sarà

$$D = 1^\circ.\ 46'$$
$$D' = 0^\circ.\ 27'$$

La latitudine del punto A sia di 46°. 25′ N, e

la longitudine di $13^\circ.\ 36'$ Or., dal meridiano di Parigi. Sarà

$$L - D' = 45^\circ.\ 58'$$
$$L' = 13^\circ.\ 36'$$

Dunque sen. λ = cos. ($1^\circ.\ 46'$) sen. ($45^\circ.\ 58'$)

log. cos. $1^\circ.\ 46'$ 9.9997935
log. sen. $45^\circ.\ 58'$ 9.8566900

log. sen. λ 9.8564835

$$\lambda = 45^\circ.\ 56'.\ 18''$$

log. tang. $1^\circ.\ 46'$ 8.4891696
com. log. cos. $45^\circ.\ 58'$ . . . 0.1579672

log. tang. φ 8.6471368

$$\varphi = 2^\circ.\ 32'.\ 27''$$
$$\lambda' = 16^\circ.\ 8'.\ 27''$$

Dunque la latitudine del punto B è di $45^\circ.\ 56'.\ 18''$ N, e la sua longitudine di $16^\circ.\ 8'.27''$ Or.

PROBL. II.

Rappresentare i punti principali di un paese, e le operazioni di dettaglio, ne' quadrilateri racchiusi da un grado di latitudine, e da un grado di longitudine, e costruiti secondo la projezione di FLAMSTEED.

116. SOLUZ. È noto dalla Geografia Matematica (Tom. II. § 215), che *Domenico Cassini* nel formare la granCarta della Francia, situò i vertici de' triangoli primarj, e secondarj per mezzo delle rispettive loro distanze dalla me-

ridiana, e dalla perpendicolare, uniformandosi così al metodo esibito nel §. 31: ed in ciascuno di que' triangoli, di cui erano già fissati i vertici, racchiuse le corrispondenti operazioni di dettaglio. Ma questo metodo nel considerare come rette parallele gli sviluppi de' cerchi massimi perpendicolari alla meridiana, ha l' inconveniente di ridurre in rettangoli gli spigoli sferici formati da due cerchi massimi; lo che non manca di produrre una sensibile alterazione su le distanze, su le superficie, e nelle rispettive posizioni de' luoghi. Si pensò dunque di sostituire a questa projezione l' altra di *Flamsteed* (G. M. Tom. II. § 186), modificata in maniera da essere i paralleli rettilinei rimpiazzati da cerchi concentrici. Nel reticolato di questa projezione si potrebbero situare i punti principali a norma delle rispettive latitudini, e longitudini, ricavate secondo i precetti del problema precedente: ma da' Geografi si suole adottare un metodo più pronto, e forse più esatto, col quale si vengono a configurare i diversi quadrilateri del reticolato, ricopiando i dettagli topografici delineati nella maniera seguente.

1°. Si comincia dall' adottare una scala di riduziono, per esem. di $\frac{1}{10000}$, cioè tale che le rette del disegno siano la *dieci-millesima* parte delle rette effettive, misurate sul terreno: così supponendo che un miglio italiano contenga 7025 palmi napolitani (18), sarà esso rappresentato da una retta lunga circa $\frac{7}{10}$ di palmo: tre miglia da una retta di palmi 2,1075: venti miglia da una retta di palmi 14,05; e così di seguito.

2°. Con siffatta scala si formano le parti componenti un quadrilatero della projezione di *Flamsteed*, racchiuso da un grado di latitudine, e da un grado di longitudine. Queste parti consistono in 60 quadrilateri parziali, detti ancora le *bande de' minuti*, perchè ciascuno di essi non contiene che soli tre minuti di latitudine, e venti minuti di longitudine. Ognuna poi di queste bande, come fosse bc, de, fg', è costruita nel seguente modo.

Ad una retta ab, che dinota lo sviluppo di un arco del meridiano di 3′ di latitudine, si dà la lunghezza di palmi (2, 1) secondo la scala adottata: indi da' suoi estremi a, b si elevano su di essa le perpendicolari ac, bd, per dinotare gli sviluppi di due archi di paralleli posti alle latitudini a, e b, e contenenti 20′ di longitudine. Chiamando L la latitudine del punto a, ed L' quella del punto b, dovrà essere

$$ac = (14^{pal.},05) \cos. L$$

$$bd = (14^{pal.},05) \cos. L'$$

Unendone gli estremi per mezzo della retta cd, si vedrà aver questa un' insensibile inclinazione verso la retta ab, qual le conviene per la convergenza, che hanno i meridiani su la sfera. Nella stessa maniera, e sopra un foglio diverso, si dovranno costruire le altre due bande consecutive de, fg; cosicchè tutte tre prese insieme formeranno la ventesima parte di un quadrilatero, avente un grado di latitudine, ed un altro di longitudine; e ciascuna separatamente ne sarà la sessantesima parte.

3°. In ognuna di queste bande si debbono situare i vertici de' triangoli primarj, e secondarj, secondo le loro rispettive latitudini, e longitudini; e marcando i lati de' triangoli primarj con delle rette forti, ed i lati de' triangoli secondarj con delle rette tratteggiate, si verranno ad avere i limiti per racchiudere le operazioni di dettaglio, che formano la configurazione delle predette bande.

Con la riunione di queste parti si ottiene l'intero disegno di un quadrilatero, che ridotto poi in dimensioni assai minori si può riportare sul reticolato di una *Carta corografica*, costruita secondo i precetti di Flamsteed.

Il Fine.



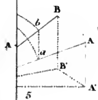
ERRORI ESSENZIALI

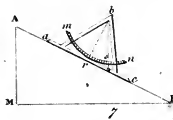
ERRATA			CORRIGE
Pag.	Ver.		
10	1		Fig. 3
20	23	dieci canne	dieci volte la catena
24	25	quarto	terzo
27	7	misurerà	misureranno
29	25	grafrica	grafica
31	30	paese	punto
32	17		Fig. 11
44	29	lali	lati
61	33	$A'=$	$D'=$
62	2	$D-A'$	$D-D'$
83	4	$S+r-{}_1C$	$S+r-\frac{1}{2}C$
96	14	1+0,002837	1–0,002837
109	23, 29	*Goedesia*	*Geodesia*

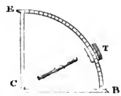


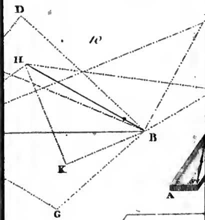


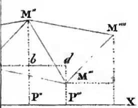

3
B
C
A

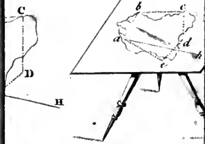

B
b
A
a
A
B'
A'
5

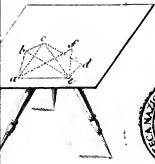

A
b
m
a
n
r
c
M
7


E
T
C
B

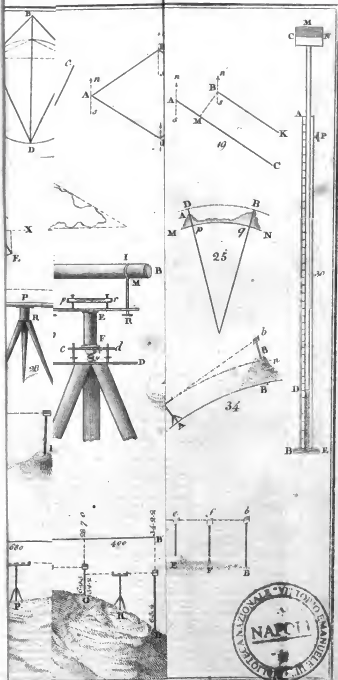

D
10
H
B
K
A
G

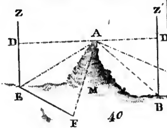

M''
M''''
b
d
M'''
P'
P''
X

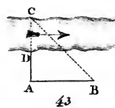

C
b
c
a
d
h
e
D
H
13

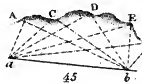

c
f
b
d
a
e

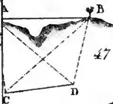



19
25
28
34
680
400


Z
Z'
D
A
D
E
M
B
F
40

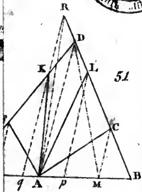

C
D
A
B
43

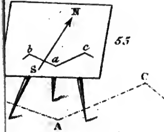

A
C
D
E
a
45
b

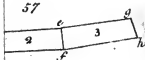

A
B
47
C
D




B
p
D


R
D
K
L
51
C
B
q
A
p
M


N
55
b
a
c
S
C
A


57
e
g
2
3
f
h



